MATE 2000+ Consolidare

Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală:...

....

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Andreea Roşca, Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a /
Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 10-a, reviz.. - Piteşti :
Paralela 45, 2021-
2 vol.
ISBN 978-973-47-3404-7
Partea 1. - 2021. - ISBN 978-973-47-3405-4

I. Negrilă, Maria

51

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea I

ediția a X-a,
revizuită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

* **Iniţiere (înţelegere)**

** **Consolidare (aplicare şi exersare)**

*** **Excelenţă (aprofundare şi performanţă)**

**** **Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Algebră

Capitolul I
Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$

PP Competenţe specifice

C1. Recunoaşterea apartenenţei unui număr real la o mulţime

C2. Efectuarea unor operaţii cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor ei

C3. Utilizarea unor procedee matematice pentru operaţii cu intervale şi rezolvarea inecuaţiilor în $\mathbb{R}$

C4. Folosirea terminologiei aferente noţiunilor de mulţime, de interval numeric şi de inecuaţii

C5. Interpretarea unei situaţii date utilizând intervale şi inecuaţii

C6. Rezolvarea unor situaţii date, utilizând intervale numerice sau inecuaţii

PE-PP 1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

Mulţimea numerelor naturale, notată cu $\mathbb{N}$, este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Observaţii:

a) Mulţimea notată cu $\mathbb{N}^*$ este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:

i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ şi **consecinţele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.

ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $\boldsymbol{x \geq y}$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $\boldsymbol{z \in \mathbb{N}}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se foloseşte teorema **împărţirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.

iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepţia cazului 0^0.

Mulţimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$, este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Observaţii:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$ şi $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă şi numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq |t| < |y|$.

Mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$, este:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z}\right\}.$$

Observaţii:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr raţional** este reprezentat de o fracţie de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}^*$. Vom spune că două fracţii $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracţii echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracţie $\frac{x}{y}$, se obţin fracţii echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: $^{t)}\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y}^{(t} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$, $y, t \in \mathbb{Z}^*$ şi $t \mid x$, $t \mid y$.

c) O **fracţie** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr raţional** care este **reprezentat** de o fracţie $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărţind numărătorul x la numitorul y.

În funcţie de factorii în care se descompune numitorul fracţiei ireductibile $\frac{x}{y}$, fracţia zecimală poate fi:

i) **fracţie zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de **2** sau de **5**;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conţine **alţi** factori decât **2** şi **5**;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conţine atât factori de 2 sau/şi numai factori de 5, cât şi un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr raţional este reprezentat printr-o **fracţie zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracţie ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracţie zecimală:

i) **fracţie zecimală finită**: $\overline{a,b_1b_2b_3...b_n} = \dfrac{\overline{ab_1b_2b_3...b_n}}{10^n}$;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**: $\overline{a,(b_1b_2b_3...b_n)} = a\dfrac{\overline{b_1b_2b_3...b_n}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)} = \frac{\overline{ab_1b_2...b_nc_1c_2...c_m} - \overline{ab_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{000...0}_{\text{de } n \text{ ori}}}.$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulţimea numerelor iraţionale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulţimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este mulţimea formată din **reuniunea** mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **şirul incluziunilor**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
f) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$; g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;
k) $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; m) $\varnothing \subseteq \mathbb{Q}$; n) $\varnothing \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$; o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $8 \in \mathbb{N}$; b) $8 \in \mathbb{Z}$; c) $8 \in \mathbb{Q}$; d) $8 \in \mathbb{R}$; e) $-6 \in \mathbb{Z}$;
f) $-6 \in \mathbb{N}$; g) $-\dfrac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; h) $-8{,}3 \in \mathbb{R}$; i) $-\dfrac{9}{3} \in \mathbb{Z}$; j) $4{,}(5) \in \mathbb{Q}$;
k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\sqrt{25-(-3)\cdot(-8)} \in \mathbb{N}$; n) $[-(-3)+(-2)]^2 \in \mathbb{Z}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{0{,}(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$;
d) $0{,}(3) + \sqrt{0{,}(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} \in \mathbb{N}$; f) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$;
g) $\{0\} \in \mathbb{R}$; h) $0 \notin \mathbb{R}^*$; i) $\{0\} \subset \mathbb{R}$; j) $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$.

4. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Produsul a două numere iraţionale este un număr iraţional.
b) Suma oricăror două numere iraţionale este un număr iraţional.
c) Suma dintre un număr raţional şi un număr iraţional este un număr iraţional.
d) Produsul dintre orice număr iraţional şi orice număr raţional nenul este un număr iraţional.
e) Pătratul oricărui număr iraţional este un număr raţional.
f) Orice număr iraţional ridicat la puterea zero este un număr natural.

5. Amplificaţi fracţiile: $\frac{6}{10}, \frac{18}{25}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ astfel încât să aibă acelaşi numitor.

6. Se consideră fracţiile: $\frac{a}{10}, \frac{a}{12}, \frac{a}{15}$ şi $\frac{a}{30}$, unde $a \neq 0$. Determinaţi cea mai mică valoare naturală a numărului a, pentru care fracţiile reprezintă simultan numere naturale.

7. a) Care dintre fracţiile: $\frac{1}{4}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{18}, \frac{12}{20}, \frac{7}{15}, \frac{30}{25}, \frac{30}{50}$ sunt echivalente cu fracţia $\frac{3}{5}$?

b) Amplificaţi cu 4 fracţiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{99}, \frac{8}{13}, \frac{5}{11}$.

c) Simplificaţi cu 5 fracţiile: $\frac{5}{20}, \frac{15}{30}, \frac{10}{175}, \frac{20}{45}, \frac{25}{110}, \frac{30}{85}$.

8. Determinaţi din şirul următor de fracţii:

$$\frac{1}{2}, \frac{61}{37}, \frac{2}{6}, \frac{55}{1133}, \frac{4}{21}, \frac{3}{9}, \frac{8}{15}, \frac{14}{2\cdot 7}, \frac{85}{15}, \frac{35}{56}, \frac{19}{72}, \frac{4\cdot 3\cdot 5}{60}$$

pe cele care sunt: (i) ireductibile; (ii) subunitare; (iii) supraunitare; (iv) echiunitare.

9. Determinaţi valorile lui x, număr natural, pentru care:

a) (i) $\frac{8}{x-3} \in \mathbb{N}$; (ii) $\frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z}$; (iii) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N}$; (iv) $\frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}$;

b) mulţimile $A = \{4x, 6x + 2\}$ şi $B = \{2x - 1, 2x + 1, 3x + 2\}$ au un singur element comun;

c) mulţimile $A = \{2x - 3, 3x - 1\}$ şi $B = \{4x - 7, x + 3\}$ sunt egale.

10. Scrieţi sub formă zecimală următoarele fracţii:

$$\frac{4}{5}, \frac{64}{25}, \frac{5}{16}, \frac{17}{125}, \frac{13}{3}, \frac{8}{15}, \frac{28}{15}, \frac{17}{6}, \frac{35}{18}.$$

11. Scrieţi sub formă de fracţie ordinară următoarele fracţii zecimale: 4,15; 2,(18); 0,3(54); 2,534; 0,35(4); 1,8(6); 13,85; 5,02(7); 1,0025; 0,008; 2,00(3).

12. Determinaţi mulţimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq x^2 \leq 50\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 24 \leq x^2 \leq 121\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 18 \leq 2x^2 \leq 98\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 48 \leq 3x^2 \leq 192\}$;

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} \leq 7,\ \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$; $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq \sqrt{x} < 10,\ \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$.

13. Fie mulţimea $A = \{0; -4; 25; -64; 0{,}36; 0{,}4; 3{,}(27)\}$. Determinaţi mulţimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$.

Geometrie

Capitolul I
Elemente ale geometriei în spaţiu

PP **Competenţe specifice**

- C1. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configuraţii spaţiale date
- C2. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configuraţii spaţiale date
- C3. Folosirea unor proprietăţi de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea poziţiilor relative ale dreptelor şi planelor
- C4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configuraţii geometrice
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configuraţii spaţiale şi a calculării unor elemente metrice
- C6. Modelarea unor situaţii practice în limbaj geometric, utilizând configuraţii spaţiale

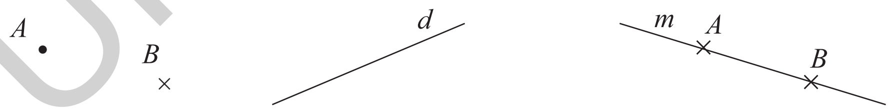
PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

Punctul, **dreapta** şi **planul** fac parte din noţiunile de bază ale geometriei în spaţiu. Ele sunt noţiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

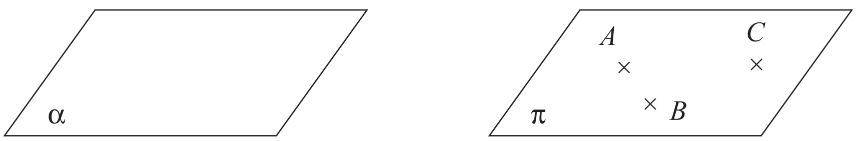
Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuţit de foaia de scris: •, ×. Se notează cu litere mari: A, B, C, … .

Dreapta. Este formată din puncte şi se reprezintă printr-un fir de aţă foarte subţire întins la nesfârşit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: a, b, d, … .

Dacă punctele A şi B sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu AB.

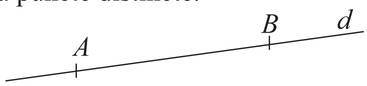


Planul. Poate fi asemănat cu suprafaţa liniştită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârşit în toate direcţiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: α, β, γ, π, … . Un plan care conţine trei puncte necoliniare A, B şi C se notează prin (ABC). Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

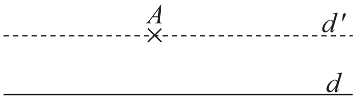


Propoziţii despre puncte, drepte şi plane

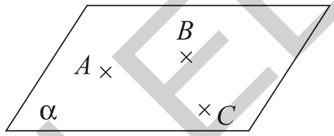
P1. (**Axioma dreptei**) Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una. Orice dreaptă are cel puţin două puncte distincte.



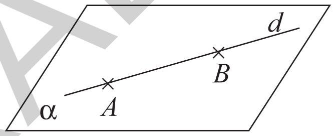
P2. (**Axioma paralelelor** sau **postulatul lui Euclid**) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă.



P3. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan şi numai unul care să le conţină. Orice plan conţine cel puţin trei puncte necoliniare.

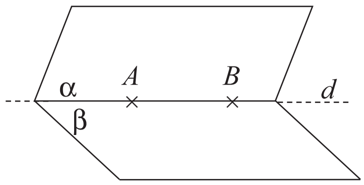


P4. Dacă două puncte distincte aparţin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

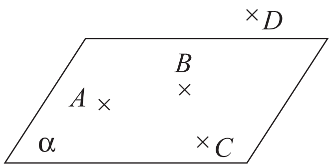


P5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puţin încă un punct comun.

Consecinţă: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



P6. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan (acestea se numesc **necoplanare**).



● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) Trei puncte necoliniare determină un …………….. .

b) Prin două puncte distincte trece o …………….. şi numai una.

c) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o …………….. comună.

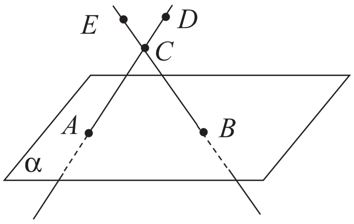
d) Patru puncte necoplanare determină un număr de …………….. drepte.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziţii:

a) Oricare trei puncte sunt coplanare.

b) Patru puncte coliniare sunt coplanare.
c) Dacă două plane au două puncte comune, atunci ele au o dreaptă comună.
d) Patru puncte, dintre care oricare trei sunt coliniare, determină o dreaptă.

3. Scrieţi toate dreptele determinate de punctele date în figura de mai jos.

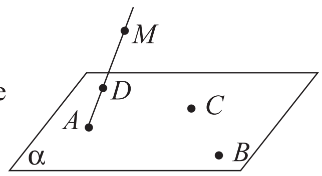


PE Aplicare şi exersare **

4. Fiind date patru puncte A, B, C şi D, stabiliţi câte drepte distincte se pot obţine unindu-le două câte două în fiecare dintre situaţiile:
a) oricare trei dintre puncte sunt necoliniare;
b) trei dintre puncte sunt coliniare;
c) punctele sunt necoplanare.

5. a) Câtor drepte poate să aparţină un punct dat?
b) Câtor plane pot să aparţină două puncte distincte date?

6. În figura alăturată, punctele $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$, $M \notin \alpha$, iar $D \in AM$.
a) Stabiliţi câte drepte distincte se pot obţine unind punctele două câte două.
b) Stabiliţi dreptele de intersecţie a planelor (MAB), (DBC) şi (MAC) cu planul α.
c) Stabiliţi dreapta de intersecţie a planelor (BDC) şi (MAC).



PE Aprofundare şi performanţă ***

7. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D, oricare trei dintre ele fiind necoliniare.
a) Determinaţi câte drepte se pot obţine unindu-le două câte două.
b) Dacă $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 84$ cm^2, d$(A, BC) = 14$ cm şi d$(D, BC) = 15$ cm, calculaţi $\mathcal{A}_{\Delta BCD}$.

8. Fie triunghiul echilateral ABC de latură 24 cm şi M un punct ce nu aparţine planului (ABC), astfel încât $MA = MB = MC = 12\sqrt{3}$ cm.
a) Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculaţi aria triunghiului MAD.
b) Dacă $MN \perp AD$, $N \in AD$, calculaţi lungimea segmentului MN.

9. Fie triunghiul echilateral ABC şi M un punct exterior planului (ABC), astfel încât $MA =$ $= 6$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{3}$ cm şi $MD = 6\sqrt{2}$ cm, unde $D \in BC$ şi $BD \equiv DC$. Stabiliţi natura triunghiului MAD şi calculaţi aria sa.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = 12$ cm şi M un punct nesituat în planul pătratului, astfel încât $MA = 12$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{10}$ cm. Ştiind că $N \in BC$, astfel încât $BN \equiv NC$, stabiliţi natura triunghiului MAN şi aflaţi aria acestuia.

11. Punctele M, A, B şi C sunt patru puncte necoplanare, $M \notin (ABC)$. Se ştie că $AB = AC = 26$ cm, $MB = MC = 8\sqrt{10}$ cm, $MA = 6$ cm şi $BC = 48$ cm. Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculaţi aria triunghiului MAD.

PE-PP **Supermate ******

12. Într-un plan sunt date cinci puncte distincte A, B, C, D, E, iar în afara planului este situat un punct P.

a) Care este cel mai mic număr de drepte care să treacă prin cel puţin două dintre aceste puncte?

b) Dar cel mai mare număr?

13. Fie A, B, C trei puncte distincte într-un plan α, iar D şi E două puncte distincte în afara planului.

a) Care este numărul minim de drepte determinate de câte două dintre aceste puncte?

b) Dar numărul maxim?

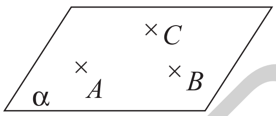
14. Cinci puncte distincte situate într-un plan şi un punct exterior acestui plan pot determina nouă drepte?

PE-PP 2. Determinarea planului

1. Trei puncte necoliniare determină un plan (fig. 1).

2. O dreaptă şi un punct care nu-i aparţine determină un plan (fig. 2).

Fig. 1



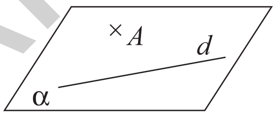
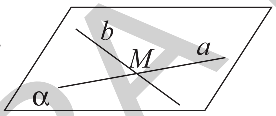


Fig. 2

3. Două drepte concurente determină un plan (fig. 3).

4. Două drepte paralele determină un plan (fig. 4).

Fig. 3



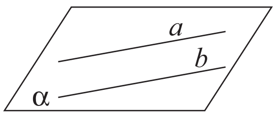


Fig. 4

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE **Înţelegere ***

1. Enumeraţi planele determinate de patru puncte necoplanare A, B, C şi D.

2. Fie un triunghi oarecare ABC şi D mijlocul laturii BC. Se consideră un punct E, nesituat în planul (ABC). Precizaţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propoziţiile următoare:

a) Punctul D aparţine planului (BCE).

b) Planele (BCE) şi (CED) coincid.

c) Punctul A aparţine planului (BCE).

3. În Piaţa San Marco din Veneţia, trei porumbei ciugulesc de pe caldarâm grăunţele aruncate de un turist. Speriaţi de un zgomot, porumbeii îşi iau zborul în direcţii diferite. După cât timp se vor regăsi situaţi într-un acelaşi plan?

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUŢIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanaţi codul QR cu camera telefonului, nu din aplicaţia Mate2000+)

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ

Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

Testul 1: **1.** a) $2\sqrt{3}$; b) –12; c) $\frac{7\sqrt{2}}{5}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{-1, 4\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right\}$; e) $S = \{-8, 2\}$. **3.** $m_g = 6$. **4.** a) $S = \{(4, -3)\}$; b) $S = \{(3, 2)\}$. **5.** b) $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$; $AC = 5\sqrt{5}$; $AC = AB + BC \Rightarrow A, B, C$ – coliniare; c) $M(2; 5)$. **6.** 420 lei. **7.** a) $\mathcal{P} = 10(3+\sqrt{3})$ cm; b) $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.
8. a) Dacă $\measuredangle BDC = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120° \Rightarrow \measuredangle AOC = 60°$, deci ΔAOC – echilateral; $\mathcal{A}_{\Delta AOC} = 16\sqrt{3}$ cm².
Testul 2: **1.** a) 36; b) $3\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{7\}$; c) $S = \{-4, 2\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-6, 2\}$. **3.** 320 lei. **4.** a) $S = \{(2, -3)\}$; b) $S = \{(3, 4)\}$. **5.** $m_a = 5\sqrt{6}$; $m_g = 12$. **6.** b) $AB = 5$, $AC = 5$; $BC = 5\sqrt{2}$. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **7.** a) $BC = 24$ cm; $DM = 6$ cm $\Rightarrow BD = 6$ cm; $AB = 12$ cm şi $AC = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 72\sqrt{3}$ cm² şi $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 12(3+\sqrt{3})$ cm; b) 25%. **8.** a) $\mathcal{A}_{\Delta CMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\Delta MAN} - \mathcal{A}_{\Delta MBC} - \mathcal{A}_{\Delta NDC} = 950$ cm²; b) $MN = 50$ cm; d$(C; MN) = 38$ cm; c) $\sin(\measuredangle CNM) = \frac{19\sqrt{26}}{130}$.

Testul 3: **1.** a) 4; b) 1; c) 128. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{1, -2\}$; d) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$.
3. 35 ani (mama); 14 ani (fiul). **4.** a) $S = \{(-2, -3)\}$; b) $S = \{(2, -1)\}$. **5.** $a = 24$; $b = 6$; $m_a = 15$; $m_g = 12$.
6. b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 48$ (u²); $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 32$ (u). **7.** a) Se arată că $\measuredangle B = 60°$. Dacă $CE \perp AB \Rightarrow CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm²; b) Se calculează $\mathcal{A}_{\Delta BDC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\Delta ADB} = 36\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow$ d$(D; BC) = 6\sqrt{3}$ cm; c) Cum $DC \parallel AB$ şi $DC = \frac{AB}{2}$, atunci CD este linie mijlocie în $\Delta MAB \Rightarrow MD = DA = 12$ cm şi $MC = BC = 12$ cm, deci ΔMAB – echilateral; $\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 144\sqrt{3}$ cm². **8.** a) $\overset{\frown}{AC} = 60° \Rightarrow \measuredangle ABC = 30° \Rightarrow AM = 10$ cm; $BC = 20\sqrt{3}$ cm; $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}} \Rightarrow R = 20$ cm; b) $MA' = 30$ cm $\Rightarrow BA' = CA' = 20\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABA'C} = \frac{BC \cdot AA'}{2} = 400\sqrt{3}$ cm²; $\mathcal{P}_{ABA'C} = 40(\sqrt{3}+1)$ cm.

Testul 4: **1.** a) $-16\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $20\sqrt{2}$. **2.** $a = \frac{4}{3}$; $b = \frac{4}{3}$; $m_g = \frac{4}{3}$. **3.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \left\{-\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\right\}$; d) $S = \{-6, 2\}$; e) $S = \{-6, 7\}$. **4.** 36 ani; 12 ani; peste 12 ani. **5.** a) $S = \{(-3, -4)\}$; b) $S =$

Cuprins

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU