

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediția a V-a,
revizuită



Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3530/04.04.2018.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene
Tehnoredactare: Roxana Pietreanu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 6 / Ion Tudor. - Ed. a 5-a, rev.. - Pitești : Paralela 45, 2021

2 vol.

ISBN 978-973-47-3413-9

Partea 2. - 2021. - ISBN 978-973-47-3415-3

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2021

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi.

Opusul unui număr întreg



Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+” în față: $+1, +2, +3, \dots$ se numesc numere întregi pozitive. Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu \mathbb{Z}_+ , deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ și avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „-” în față: $-1, -2, -3, \dots$ se numesc numere întregi negative. Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu \mathbb{Z}_- , deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu \mathbb{Z} și se definește astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numește mulțimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparțin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiție: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înțelegem numărul întreg $-a$.
Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg -5 .

Opusul numărului întreg -8 este numărul întreg 8.



Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinați mulțimile:

a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;

b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

Soluție:

a) $E = \{15, 8\}$;

b) $F = \{-6, -21\}$.

2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

a) -9 ;

b) 0 ;

c) 17 ;

d) -11 .

Soluție:

a) 9 ;

b) 0 ;

c) -17 ;

d) 11 .

Exerciții și probleme de dificultate medie

- 11.** Se consideră mulțimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinați mulțimea $B = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in A\}$.
- 12.** Se consideră mulțimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinați mulțimea $F = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E\}$.
- 13.** Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = -x\}$ și precizați cardinalul acesteia.
- 14.** Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr prim de o cifră}\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.
- 15.** Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr compus de o cifră}\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.
- 16.** Se consideră mulțimile $X = \{-8, 0, 3\}$ și $Y = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in X\}$. Scrieți submulțimile mulțimii Y .
- 17.** Se consideră mulțimile $X = \{-9, -5, 2, 0, -3, 1, 3\}$ și $Y = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in X\}$. Câte submulțimi are mulțimea Y ?
- 18.** Se consideră mulțimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ și $B = \{b \mid b \text{ este opusul lui } a, a \in A\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.
- a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- 19.** Se consideră numărul întreg $a = \underbrace{-(-(-(-\dots(-1)\dots)))}_{101 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg a .
- 20.** Se consideră numărul întreg $x = \underbrace{-(-(-(-(-\dots(-1)\dots)))}_{132 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg x .



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră mulțimea $A = \{-13, -2, 8, 0, 11, -10\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.
- a) $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \in A\}$; b) $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \in A\}$; c) $A_3 = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in A\}$.

(3p) 2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

a) 87;

b) -705;

c) 101.

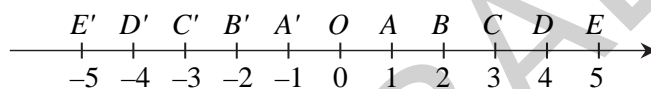
(3p) 3. Se consideră mulțimile $A = \{-5, -4, 0, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{b \in \mathbb{Z}_- \mid b \text{ este opusul lui } a, a \in A\}$. Efectuați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor



Citesc și rețin

Pe dreapta d se fixează un punct O , numit origine, se stabilește un sens de parcurgere (indicat de o săgeată) și se alege o unitate de măsură (un segment MN de lungime u). Cu aceste trei proprietăți, dreapta d se numește axa numerelor.



$$M \overset{u}{\rule{1cm}{0.4pt}} N$$

Numeralele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor.

Oricărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă, numărul întreg numindu-se coordonata punctului respectiv. Coordonata punctului O este numărul întreg 0.

Exemple: Numărul întreg 4 este coordonata punctului D .

Numărul întreg -1 este coordonata punctului A' .

Observație: Două puncte de pe axa numerelor, care au drept coordonate două numere întregi opuse, sunt simetrice în raport cu originea axei.

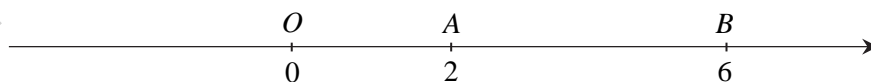
Exemplu: Punctul C' este simetricul punctului C față de punctul O în figura de mai sus.



Cum se aplică?

1. Punctele A și B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 2, respectiv 6. Dacă $AB = 28$ mm, aflați OA și OB .

Soluție:



Mai întâi aflăm lungimea unității de măsură pe care o notăm cu x . $AB = OB - OA = 6x - 2x = 4x$, deci $4x = 28$ mm și obținem $x = 7$ mm, prin urmare $OA = 2 \cdot 7$ mm = 14 mm și $OB = 6 \cdot 7$ mm = 42 mm.

GEOMETRIE

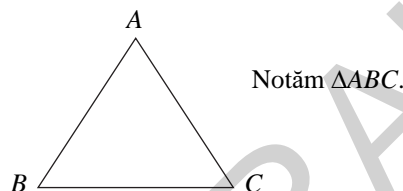
Capitolul II TRIUNGHIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare



Citesc și rețin

Definiție: Fiind date trei puncte necoliniare A , B și C , se numește **triunghi** determinat de punctele A , B , C reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CA$.



Punctele A , B și C se numesc **vârfurile** triunghiului, segmentele AB , BC și CA se numesc **laturile** triunghiului, iar unghiurile $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ se numesc **unghiurile** triunghiului.

Observații:

1. Latura AB se opune unghiului $\sphericalangle C$, latura BC se opune unghiului $\sphericalangle A$, iar latura CA se opune unghiului $\sphericalangle B$.
2. Unghiul $\sphericalangle A$ se opune laturii BC , unghiul $\sphericalangle B$ se opune laturii AC , iar unghiul $\sphericalangle C$ se opune laturii AB .

A. Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

Definiții:

1. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi **isoscel** (fig. 1).

Observație: Latura triunghiului isoscel care nu este congruentă cu celelalte două se numește **bază**.

2. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește triunghi **echilateral** (fig. 2).

3. Triunghiul ale cărui laturi au lungimi diferite se numește triunghi **oarecare** sau **scalen** (fig. 3).

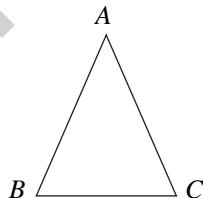


fig. 1

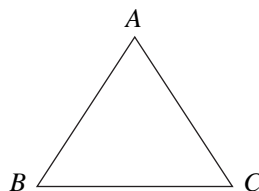


fig. 2

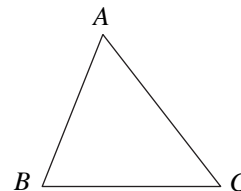


fig. 3

B. Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

Definiții:

1. Triunghiul care are cele trei unghiuri ascuțite se numește triunghi **ascuțitunghic** (fig. 4).
2. Triunghiul care are un unghi drept se numește triunghi **dreptunghic** (fig. 5).
3. Triunghiul care are un unghi obtuz se numește triunghi **obtuzunghic** (fig. 6).

Observație: Pentru triunghiul dreptunghic, latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**, iar celelalte două laturi se numesc **catete**.

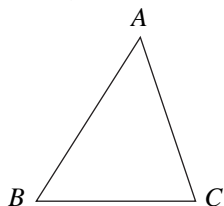


fig. 4

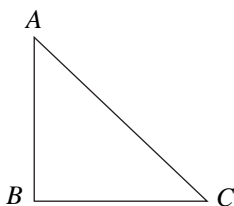


fig. 5

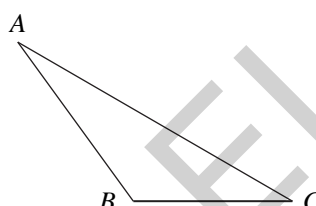


fig. 6



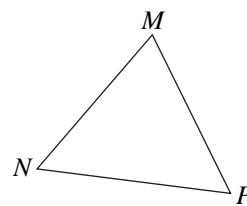
Cum se aplică?

1. Pentru triunghiul MNP reprezentat în figura alăturată precizați:

- a) vârfurile;
- b) laturile;
- c) unghiurile.

Soluție:

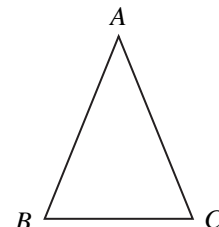
- a) Vârfurile triunghiului MNP sunt punctele M , N și P .
- b) Laturile triunghiului MNP sunt segmentele MN , NP și PM .
- c) Unghiurile triunghiului MNP sunt $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$ și $\sphericalangle PMN$.



2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC , de bază BC . Ce puteți spune despre unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$?

Soluție:

Măsurând unghiurile obținem $\sphericalangle ABC = 67^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 67^\circ$, prin urmare $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$.

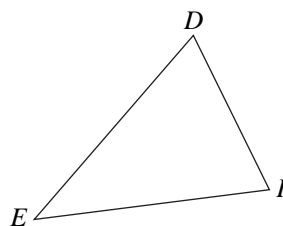


3. Măsurăți laturile triunghiului DEF reprezentat în figura alăturată și apoi încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- A. isoscel;
- B. echilateral;
- C. scalen.

Soluție:

Măsurând cu rigla gradată laturile triunghiului DEF obținem $DE = 3,2$ cm, $EF = 3,1$ cm și $FD = 2,3$ cm, prin urmare răspunsul corect este C. scalen.



Știu să rezolv

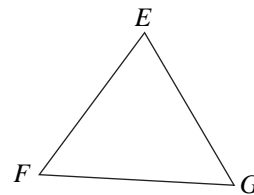
Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele notații:

- a) $\triangle DEF$;
- b) $\triangle PQR$;
- c) $\triangle ABC$;
- d) $\triangle MNP$.

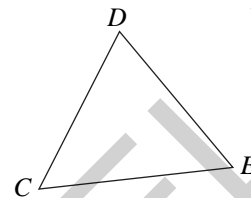
2. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul EFG reprezentat în figura alăturată scrieți:

- a) vârfurile triunghiului
- b) laturile triunghiului
- c) unghiurile triunghiului



3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În triunghiul CDE din figura alăturată:

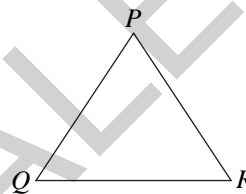
- a) latura CD se opune unghiului $\sphericalangle E$;
- b) latura CE se opune unghiului $\sphericalangle C$;
- c) latura DE se opune unghiului $\sphericalangle C$.



4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

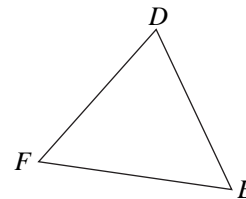
În triunghiul PQR din figura alăturată:

- a) unghiul $\sphericalangle P$ se opune laturii QR ;
- b) unghiul $\sphericalangle Q$ se opune laturii PR ;
- c) unghiul $\sphericalangle R$ se opune laturii QR .



5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. În triunghiul DEF reprezentat în figura alăturată:

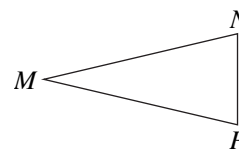
- a) latura DE se opune unghiului
- b) unghiul $\sphericalangle E$ se opune laturii
- c) latura DF se opune unghiului
- d) unghiul $\sphericalangle D$ se opune laturii
- e) latura EF se opune unghiului
- f) unghiul $\sphericalangle F$ se opune laturii



6. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi:

- A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

7. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Baza triunghiului isoscel MNP reprezentat în figura alăturată este latura



8. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă lungimile laturilor triunghiului MNP îndeplinesc condiția $MN \neq NP \neq PM \neq MN$, atunci triunghiul este:

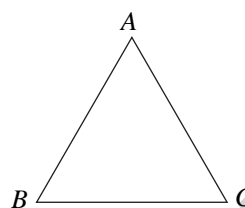
- A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

9. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește:

- A. oarecare; B. isoscel; C. echilateral.

10. a) Măsurați unghiurile triunghiului echilateral $\triangle ABC$ reprezentat în figura alăturată și apoi completați spațiile punctate cu valorile corespunzătoare:

$\sphericalangle A =$;
 $\sphericalangle B =$;
 $\sphericalangle C =$



b) Folosind rezultatele obținute la a), stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: Dacă ABC este un triunghi echilateral, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

11. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numește ascuțitunghic dacă are:

A. două unghiuri ascuțite; B. un unghi ascuțit; C. trei unghiuri ascuțite.

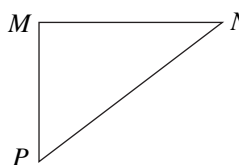
12. Folosind rezultatul problemei 10, stabiliți valoarea de adevăr a propoziției. Triunghiul echilateral este un triunghi ascuțitunghic.

13. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are un unghi drept se numește:

A. echilateral; B. dreptunghic; C. obtuzunghic.

14. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul dreptunghic MNP reprezentat în figura alăturată precizați:

a) unghiul drept ;
 b) ipotenuza ;
 c) catetele



15. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numește obtuzunghic dacă are:

A. un unghi drept; B. un unghi ascuțit; C. un unghi obtuz.

Exerciții și probleme de dificultate medie

16. Construiți triunghiul DEF . Scrieți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului DEF .

17. Construiți triunghiul MNP .

a) Scrieți unghiurile care se opun laturilor MN , NP , respectiv PM .
 b) Scrieți laturile care se opun unghiurilor $\sphericalangle M$, $\sphericalangle N$, respectiv $\sphericalangle P$.

18. Construiți triunghiul ABC dreptunghic în C și apoi precizați ipotenuza și catetele acestuia.

19. Construiți triunghiul dreptunghic DEF cu măsura $\sphericalangle D = 90^\circ$ și măsurați laturile acestuia. Ce puteți spune despre laturile:

a) EF și DE ? b) EF și DF ?

20. Construiți triunghiul MNP și notați cu Q și R simetricile punctelor N , respectiv P față de punctul M . Ce puteți spune despre:

a) unghiurile $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle Q$? b) laturile NP și QR ? c) unghiurile $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle R$?

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg	5
Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor	8
Lecția 3. Valoarea absolută a unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi.	11
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	14
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	15
Lecția 4. Adunarea numerelor întregi. Proprietățile adunării	17
Lecția 5. Scăderea numerelor întregi	20
Lecția 6. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietățile înmulțirii	22
Lecția 7. Împărțirea numerelor întregi	26
Lecția 8. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg.....	29
Lecția 9. Reguli de calcul cu puteri	32
Lecția 10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor cu numere întregi.....	34
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	38
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	39
Lecția 11. Ecuații în \mathbb{Z}	40
Lecția 12. Inecuații în \mathbb{Z}	43
Lecția 13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor	46
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	49
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	50
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	52

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Lecția 14. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional.....	54
Lecția 15. Compararea numerelor raționale.....	59
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	63
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	64
Lecția 16. Adunarea numerelor raționale. Proprietățile adunării	66
Lecția 17. Scăderea numerelor raționale.....	70
Lecția 18. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietățile înmulțirii	75
Lecția 19. Puterea cu exponent natural a unui număr rațional	80
Lecția 20. Împărțirea numerelor raționale	84
Lecția 21. Ordinea efectuării operațiilor.....	89
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	93
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	95
Lecția 22. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$), unde a , b și c sunt numere raționale	97
Lecția 23. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	101
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	105
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	106
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	108

GEOMETRIE

CAPITOLUL II. TRIUNGIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare	110
Lecția 2. Elemente de raționament geometric.....	114
Lecția 3. Perimetrul triunghiului.....	116
Lecția 4. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	119
Lecția 5. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior.....	122
Lecția 6. Construcția triunghiurilor: cazurile L.U.L., U.L.U. și L.L.L.	125
Lecția 7. Inegalități între elementele triunghiului.....	127
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>129</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>130</i>
Lecția 8. Concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi ...	131
Lecția 9. Concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi	134
Lecția 10. Înălțimile unui triunghi. Concurența înălțimilor unui triunghi	137
Lecția 11. Medianele unui triunghi. Concurența medianelor unui triunghi	139
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>142</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>143</i>
Lecția 12. Congruența triunghiurilor oarecare.....	145
Lecția 13. Criteriile de congruență a triunghiurilor	147
Lecția 14. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice.....	151
Lecția 15. Metoda triunghiurilor congruente.....	155
Lecția 16. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi.....	160
Lecția 17. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.....	163
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>166</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>167</i>
Lecția 18. Proprietăți ale triunghiului isoscel	169
Lecția 19. Proprietăți ale triunghiului echilateral	173
Lecția 20. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	178
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>183</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>184</i>
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională.....</i>	<i>186</i>
MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL AL II-LEA	188
TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....	191
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	194