Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea a II-a

ediția a X-a

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Andreea Roşca
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZAHARIA, DAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a / Dan Zaharia, Maria Zaharia. - Ed. a 10-a. - Piteşti : Paralela 45, 2021
2 vol.
ISBN 978-973-47-3400-9
Partea 2. - 2021. - ISBN 978-973-47-3407-8

I. Zaharia, Maria

51

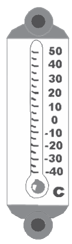
Algebră

Capitolul I
Mulțimea numerelor întregi

PP **Competenţe specifice**

- **C1.** Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- **C2.** Utilizarea operaţiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- **C3.** Aplicarea regulilor de calcul şi folosirea parantezelor în efectuarea operaţiilor cu numere întregi
- **C4.** Redactarea etapelor de rezolvare a ecuaţiilor şi a inecuaţiilor studiate în mulţimea numerelor întregi
- **C5.** Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- **C6.** Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situaţii date, rezolvarea ecuaţiei sau inecuaţiei obţinute şi interpretarea rezultatului

PE-PP 1.1. Număr întreg. Mulţimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi



La televizor sau la radio auziţi zilnic „buletinul meteo”.
Temperaturile pot fi **pozitive**, **zero** sau **negative**.

+3° C se citeşte „plus 3 grade Celsius”
+28° C se citeşte „plus 28 de grade Celsius”
–5° C se citeşte „minus 5 grade Celsius”
–14° C se citeşte „minus 14 grade Celsius”

Temperaturile negative, zero sau pozitive se înregistrează cu ajutorul **termometrului**.

Dacă dorim să ştim înălţimea unui munte sau reperele unei epave de pe fundul oceanului, înseamnă că dorim să ştim **altitudinea**. Altitudinea se măsoară luând ca reper **nivelul mării**, care este considerat zero (0) metri.

Vârful unui deal sau înălţimea unui munte se exprimă **printr-un număr precedat de**

semnul „+”, iar un punct de pe fundul unui ocean se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „–”**.

În cadrul firmelor comerciale se folosesc noţiunile de **credit**, **debit** şi **sold**.

Exemple:

1. În luna septembrie, o firmă a încasat 10 000 lei pe marfa vândută (**creditul** este +10 000 lei) şi a cheltuit 5000 lei (**debitul** este –5000 lei). **Soldul** acestei luni este pozitiv, adică +5000 lei, deoarece s-a încasat mai mult cu 5000 lei decât s-a cheltuit.

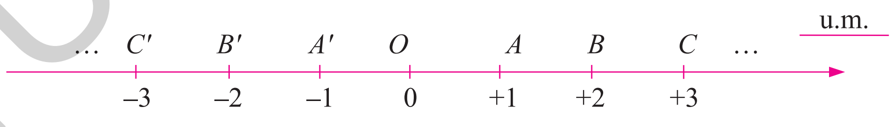
2. În luna octombrie, o firmă a încasat 300 000 lei (**creditul** este +300 000 lei) şi a cheltuit 400 000 lei (**debitul** este –400 000 lei). **Soldul** acestei luni este negativ, adică –100 000 lei, deoarece s-a încasat mai puţin cu 100 000 lei decât s-a cheltuit.

În exemplele date s-au întâlnit numere precedate de semnul „+” sau de semnul „–”. Aceste numere sunt **numere întregi**.

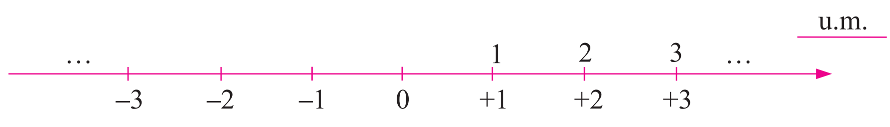
Se numeşte **număr întreg** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul „+” (plus), fie de semnul „–” (minus).

Observaţii:

- Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.
- Mulţimea {+1, +2, +3, …} este o submulţime a mulţimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_+^*$ şi se numeşte **mulţimea numerelor întregi pozitive**.
- Mulţimea {–1, –2, –3, …} este o submulţime a mulţimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_-^*$ şi se numeşte **mulţimea numerelor întregi negative**.
- Mulţimea numerelor întregi negative împreună cu mulţimea numerelor întregi pozitive şi cu numărul natural 0 formează mulţimea numerelor întregi, adică, avem: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+^*$ şi notăm $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Mulţimea {0; +1; +2; +3; …} se numeşte **mulţimea numerelor întregi nenegative.**
- Se numeşte **opusul unui număr întreg diferit de zero** acel număr întreg care se obţine din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0. Opusul numărului întreg +2 este numărul întreg –2, iar opusul numărului întreg –5 este numărul întreg +5.
- Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. **Axa numerelor** este o dreaptă pe care am fixat: un punct numit **origine**, un **sens pozitiv** şi o **unitate de măsură**.



Să reprezentăm pe axa numerelor şi numerele naturale.



Se observă că orice număr natural n coincide cu numărul întreg $+n$ şi notăm $+n = n$. Astfel, se poate scrie $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$ sau $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- **Numărul 0 nu este nici pozitiv şi nici negativ**.
- **Numerele întregi negative** sunt folosite pentru a descrie: adâncimi sub nivelul mării, temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheţ, datorii.

Exemple:

1. În ziua de 2 februarie 2009, la ora 6 dimineaţa, temperatura a fost de –9°C (minus 9 grade Celsius).

2. În Oceanul Atlantic s-a găsit, la adâncimea de 4375 m, o epavă. Adâncimea poate fi exprimată ca fiind –4375 m, raportată la nivelul mării.

3. Pasul Predeal se află la înălţimea de 1040 m. Altitudinea Pasului Predeal, raportată la nivelul mării, poate fi exprimată ca fiind +1040 m.

4. Dacă încasările unei societăţi comerciale au fost de 5 milioane lei şi plăţile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este de 2 milioane lei (+2 milioane lei).

5. Dacă încasările unei societăţi comerciale au fost de 2 milioane lei şi plăţile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este negativ (–1 milion lei), adică societatea are o datorie de 1 milion de lei.

Priviţi axa numerelor şi observaţi că există puncte egal depărtate de origine. Punctele A şi A', punctele B şi B' sunt egal depărtate de originea axei. Dacă două numere nenule corespund pe axă la două puncte egal depărtate de punctul O (originea axei), atunci cele două numere sunt **opuse**.

Exemple:

1. Numerele –1 şi 1 corespunzătoare punctelor A' şi A sunt opuse.

2. Numerele –3 şi 3 corespunzătoare punctelor C' şi C sunt opuse.

În general, dacă notăm cu a un număr natural nenul, atunci:

- **opusul** numărului întreg pozitiv $+a$ este numărul întreg negativ $-a$;
- **opusul** numărului întreg negativ $-a$ este numărul întreg pozitiv $+a$.

Atenţie!

- **Opusul** numărului negativ –3 se notează cu – (–3) şi este egal cu numărul pozitiv +3, adică – (–3) = +3.
- **Opusul** numărului pozitiv +4 se notează cu – (+4) şi este egal cu numărul negativ –4, adică – (+4) = –4.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi corect propoziţiile:

a) Orice număr natural este … .

b) Opusul unui număr întreg diferit de zero este … .

c) Axa numerelor este … .

2. Reprezentaţi pe axa numerelor următoarele numere întregi:

a) –5; +1; 0; –1; +2; –4;

b) –7; +4; –3; 0; +13; –2; +5;

c) –5; –3; 4; –7; 3; +5;

d) 50; –50; 30; –20; +20; 10; –10; 0.

3. Precizaţi care dintre numerele de mai jos sunt naturale şi care sunt întregi:

a) –17; +3; 0; $\frac{4}{2}$; –13; 41; b) –3; 0; 83; +15; + 43; –17.

4. Care dintre incluziunile următoare este corectă: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$?

Justificaţi. Daţi exemple.

5. Se consideră mulţimea $A = \{-3, 0, 2\}$. Scrieţi toate submulţimile mulţimii A.

6. Completaţi tabelele de mai jos:

a)

a	+3	–14	0	+11	–13	2	–3	4	–7	+5	–12
–a											

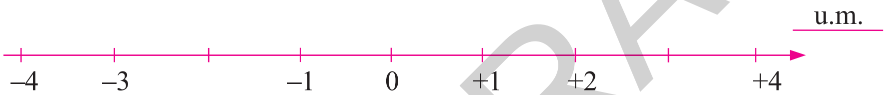
b)

a											
–a	–15	+13	0	–17	2	–1	1	–7	+5	+4	–5

c)

a	–3		0	+3			13		+4	–8	
–a		7			–14	+15		–12			–17

7. Pe o axă avem reprezentate numerele:



a) Scrieţi numerele întregi pozitive reprezentate pe axă.
b) Scrieţi numerele întregi negative reprezentate pe axă.
c) Scrieţi perechile de numere întregi opuse reprezentate pe axă.
d) Sunt numere naturale reprezentate pe axă?

8. Scrieţi mulţimea A, formată din opusele elementelor mulţimii:

a) $M = \{-2, +3, 0, -444, -3, +7, +2\}$; b) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 3\}$.

9. Precizaţi numerele care au, respectiv, opusele: –7, +5, –3, 0, +2, –1, +6, –4.

10. Scrieţi câte trei elemente aparţinând mulţimilor:

a) $\mathbb{N}$; b) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$; e) $\mathbb{Z}_-$; f) $\mathbb{Z}_+$.

PE Aplicare şi exersare **

11. Scrieţi numerele întregi în fiecare dintre cazurile:
a) sunt mai mari decât –4 şi mai mici decât +3;
b) sunt mai mici sau egale cu 4 şi mai mari sau egale cu –3;
c) sunt cinci numere întregi consecutive, cel mai mic dintre ele fiind –3.

12. Fie şirul de numere întregi: –14, –7, 0, …, 28.
a) Completaţi numerele care lipsesc din şir.
b) Scrieţi opusele numerelor din şir.

13. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $2{,}5 \in \mathbb{Z}$; b) $-3{,}7 \notin \mathbb{Z}$; c) $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$; d) $-4 \notin \mathbb{Z}$;

e) $+2 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; f) $-7 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; g) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$; h) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;

i) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \varnothing$; j) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$; k) $+5 \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$; l) $-4 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$.

Geometrie

Capitolul I
Triunghiul

PP Competenţe specifice

- **C1.** Recunoaşterea unor elemente de geometrie plană asociate noţiunii de triunghi
- **C2.** Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului
- **C3.** Utilizarea criteriilor de congruenţă şi a proprietăţilor unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configuraţii geometrice
- **C4.** Exprimarea în limbaj geometric simbolic şi figurativ a caracteristicilor triunghiurilor şi ale liniilor importante în triunghi
- **C5.** Analizarea unor construcţii geometrice în vederea evidenţierii unor proprietăţi ale triunghiurilor
- **C6.** Transpunerea, în limbaj specific, a unei situaţii date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului

PE-PP 1.1. Triunghi. Definiţie. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului

Definiţie: Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, se numeşte **triunghi determinat de punctele A, B, C** mulţimea formată de cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC şi CA. (fig. 1).

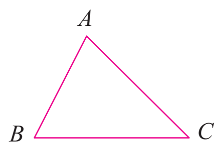


Fig. 1

Observaţii:

- Triunghiul este o mulțime de puncte din plan, adică **o figură geometrică**, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C se poate nota ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB, ΔCBA (la citirea unui triunghi literele A, B, C pot fi aşezate în orice ordine dorim).
- Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului**. Segmentele AB, BC, CA se numesc **laturile triunghiului**. Unghiurile ABC, BCA, CAB se numesc **unghiurile triunghiului**.

• În triunghiul ABC, **latura *BC* se opune unghiului *A*** și, reciproc, **unghiul *A* este opus laturii *BC***, iar **unghiurile *B* și *C* sunt alăturate laturii *BC***.

• Pentru lungimile laturilor unui triunghi ABC, se mai folosesc notațiile: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

• Dacă nu există posibilitatea unor confuzii pentru unghiurile triunghiului ABC se pot folosi și notațiile $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle A$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.

Definiţie: Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **perimetrul triunghiului,** se notează cu $\mathscr{P}$ și

$$\mathscr{P} = AB + BC + CA.$$

Observaţie:

• Semisuma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **semiperimetrul triunghiului**, se notează cu p, unde $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

Definiţii: • Un punct se numește **interior unui triunghi**, dacă punctul este interior fiecărui unghi al triunghiului.

• Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi, se numește **interiorul triunghiului**.

• Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și care nu este nici interior triunghiului se numește **punct exterior triunghiului**, iar mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi formează **exteriorul triunghiului.**

Definiţie: Un triunghi care are laturile de lungimi diferite se numește **triunghi scalen** (fig. 2).

Observaţii:

• Triunghiul scalen se mai poate defini ca un triunghi în care oricare două laturi nu sunt congruente.

• În figura 2, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm și $BC = 2{,}5$ cm.

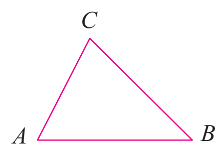


Fig. 2

Definiţie: Un triunghi cu două laturi congruente se numește **triunghi isoscel,** iar cea de-a treia latură se numește **baza**[1] **triunghiului isoscel**.

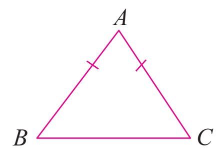


Fig. 3

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 3 este isoscel.

• Laturile congruente sunt AB și AC ($AB = AC$)

• Latura BC este baza triunghiului isoscel ABC.

Definiţie: Un triunghi cu toate laturile congruente se numește **triunghi echilateral**.

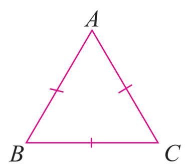


Fig. 4

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 4 este triunghi echilateral.

• Toate laturile sunt congruente $AB = AC = BC$.

[1] Foarte probabil că denumirea de „bază” provine din preferința de a desena triunghiul isoscel cu „baza în jos”. Desigur, această preferință nu impune din punct de vedere geometric nimic. De altfel, și în această carte apar frecvent triunghiuri isoscele „cu baza în sus”.

● Un triunghi echilateral este totodată triunghi isoscel, oricare două dintre laturile lui sunt congruente ($AB = AC$, $AB = BC$, $AC = BC$).

Definiţie: Un triunghi care are toate unghiurile ascuţite se numeşte **triunghi ascuţitunghic.**

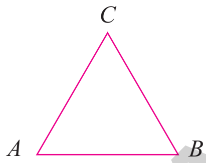


Fig. 5

Observaţii:

● Triunghiul ABC din figura 5 este triunghi ascuţitunghic.

● Toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite: $A < 90°$, $B < 90°$, $C < 90°$.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi drept se numeşte **triunghi dreptunghic.** Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numeşte **ipotenuză**.

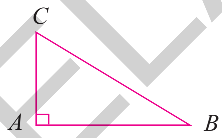


Fig. 6

Observaţii:

● Triunghiul ABC din figura 6 este triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$).

● AB şi AC sunt **catete**, BC este **ipotenuză**.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi obtuz se numeşte **triunghi obtuzunghic.**

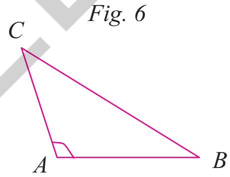


Fig. 7

Observaţie:

● Triunghiul ABC din figura 7 este triunghi obtuzunghic ($\sphericalangle A > 90°$).

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Desenaţi trei puncte necoliniare M, N, P şi triunghiul determinat de cele trei puncte. Denumiţi vârfurile, laturile şi unghiurile triunghiului.

2. Desenaţi un triunghi ABC şi precizaţi:

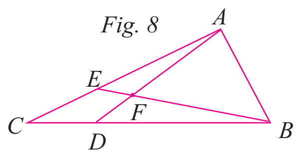
a) latura opusă unghiului A;

b) unghiul opus laturii AB;

c) unghiurile alăturate laturii BC.

3. Fie patru puncte P, Q, R, H astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumiţi aceste triunghiuri.

4. Priviţi figura 8. Scrieţi apoi:

Fig. 8


a) triunghiurile din figură care au ca latură comună pe AB;

b) triunghiurile din figură care au ca unghi comun pe $\sphericalangle FBD$;

c) numărul triunghiurilor din figură.

5. Urmăriţi figura 9 şi stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

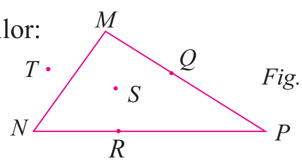


Fig. 9

a) $Q \in \Delta MNP$; b) $S \in \text{int}(\Delta MNP)$;

c) $R \notin \Delta MNP$; d) $T \in \text{int}(\Delta MNP)$;

e) $T \notin \text{ext}(\Delta MNP)$; f) $S \in \text{ext}(\Delta MNP)$.

6. Când spunem că un triunghi este isoscel? Dar echilateral? Dar dreptunghic? Dar obtuzunghic? Dar ascuţitunghic?

7. Un triunghi dreptunghic PQR are catetele PQ şi QR. Precizaţi care este ipotenuza şi care este unghiul drept.

8. Stabiliţi natura triunghiului ABC ştiind că:

a) $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm;
b) $AB = AC = 6$ cm şi $BC = 4$ cm;
c) $AB = AC = BC = 6$ cm.

9. Stabiliţi natura triunghiului LMP ştiind că:

a) $\sphericalangle M = 90°$, $LM = 4$ cm, $MP = 4$ cm;
b) $\sphericalangle M = 110°$, $LM = MP = 3$ cm;
c) $\sphericalangle$M $= 45°$, $\sphericalangle L = 65°$, $\sphericalangle P = 70°$.

PE Aplicare şi exersare **

10. Fie s unul dintre semiplanele determinate de o dreaptă d. Desenaţi două triunghiuri care să aibă o latură comună inclusă în d şi câte un vârf în semiplanul s.

11. Desenaţi un triunghi MNP şi fixaţi punctele:

a) A şi B în interiorul triunghiului; b) C şi D care să aparţină triunghiului;
c) E şi F în exteriorul triunghiului.

12. Calculaţi perimetrul unui triunghi dacă:

a) semiperimetrul este 5,7 cm;
b) $AB = 4$ cm, $BC = \frac{3}{4} \cdot AB$ şi lungimea laturii AC este media aritmetică a lungimilor laturilor AB şi BC;
c) $AB = 30$ mm, $BC = 1{,}8$ cm şi $AC = 0{,}24$ dm.

13. Aflaţi lungimile laturilor unui triunghi ABC ştiind că:

a) perimetrul triunghiului este de 9,6 cm, AC este cu 0,8 cm mai mare decât AB şi reprezintă $\frac{4}{5}$ din BC;
b) perimetrul este 24 cm şi lungimile laturilor sunt numere naturale pare, consecutive.

14. Se consideră un triunghi ABC şi un punct D între A şi B. Calculaţi lungimea laturii CD dacă perimetrele triunghiurilor ACD, BCD şi ABC sunt egale cu 11 cm, 9 cm şi, respectiv, 14 cm.

PE Aprofundare şi performanţă ***

15. Dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, stabiliţi dacă punctele A, B, C sunt coliniare în fiecare dintre cazurile:

a) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm; b) $a = 8$ cm, $b = 11$ cm, $c = 3$ cm.

16. Se consideră un triunghi ABC şi un punct D situat pe latura BC. Dacă $\mathscr{P}_{\Delta ABD} = 19$ cm, $\mathscr{P}_{\Delta ACD} = 26$ cm şi $AD = 8$ cm, aflaţi $\mathscr{P}_{\Delta ABC}$.

17. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului ABC, ştiind că perimetrul său este de 106 cm, lungimea laturii AB este 40% din lungimea laturii AC, iar lungimea laturii AC este 80% din lungimea laturii BC.

18. Stabiliţi natura triunghiului MNP dacă:

a) $\sphericalangle M = 110°$; b) $MN = 4$ cm, $MP = 4$ cm şi $\sphericalangle M = 90°$;
c) $MN = 3{,}2$ cm, $NP = 0{,}32$ dm şi $MP = 32$ mm.

Cuprins

GEOMETRIE