Prof. univ. dr. Dorin Andrica
(coordonator)

Prof. dr. Paul-Mihai Şuşoi

Prof. grad I Nicolae Stăniloiu **Prof. grad I Camelia Pîrvu**

CONCURSUL DE TITULARIZARE

MATEMATICĂ

Aspecte ştiinţifice şi metodologice

25 de modele de teste cu rezolvări,
precizări metodice şi observaţii metodologice

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programa în vigoare pentru titularizarea profesorilor de matematică.

Redactare: Iuliana Ene, Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mariana Dumitru

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Concursul de titularizare matematică : aspecte științifice și metodologice :
25 de modele de teste cu rezolvări, precizări metodice și observații metodologice /
prof. univ. dr. Dorin Andrica (coord.), prof. dr. Paul-Mihai Șușoi, prof. grad I Nicolae Stăniloiu,
prof. grad I Camelia Pîrvu. - Pitești : Paralela 45, 2022
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-3523-5

I. Andrica, Dorin
II. Șușoi, Paul Mihai
III. Stăniloiu, Nicolae
IV. Pîrvu, Camelia

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea de față se adresează absolvenților Facultății de Matematică și profesorilor suplinitori care doresc să participe la concursul național de titularizare în învățământ.

Materialul este organizat în patru capitole după cum urmează. Primul capitol prezintă programa în vigoare pentru *Concursul național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor vacante/rezervate în învățământul preuniversitar la disciplina Matematică* și reprezintă fundamentul pe care se construiește programul de pregătire. Capitolul II este intitulat „Considerații privind elaborarea itemilor de evaluare (clasificare, caracteristici, cerințe)" și trece în revistă acest subiect important atât prin prezentarea aspectelor teoretice, cât și prin ilustrarea acestora prin exemple și aplicații concrete. Capitolul III conține 25 de variante/modele de teste pentru concursul de titularizare, însoțite de soluții complete, comentarii și observații metodice şi metodologice. Problemele selectate pentru aceste variante acoperă subiectele importante de Algebră, Geometrie și Analiză matematică din programa prezentată în primul capitol. Variantele propuse pot constitui un antrenament extrem de util în procesul de pregătire pentru acest concurs. Ultimul capitol, „Corelația dintre itemii de evaluare și competențele specifice (exemple)", reflectă în mare măsură experiența autorilor în abordarea subiectului de metodică. Bibliografia utilizată și atașată completează referințele conținute în bibliografia orientativă din programa pentru concurs.

Considerăm că lucrarea de față constituie un instrument util în pregătirea acestui examen important pentru viitorul unui profesor de matematică. Ea acoperă în mare măsură matematica de bază din programa pentru concurs, atât prin modelele de subiecte, cât și prin aspectele metodice aferente acestora.

Prof. univ. dr. Dorin Andrica

Dorin Andrica este profesor universitar doctor la Facultatea de Matematică și Informatică de la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. A publicat numeroase cărți, monografii, volume ale unor conferințe, peste 170 de articole științifice și a participat la numeroase conferințe și simpozioane la nivel național și internațional. Este citat de către autori români sau străini în numeroase lucrări științifice, monografii sau teze de doctorat. Este membru în comitetele editoriale ale mai multor reviste naționale și internaționale de specialitate. A publicat 14 cărți la edituri internaționale de prestigiu, în limbile engleză, arabă, portugheză, japoneză, coreeană și este autorul a numeroase probleme originale propuse în diferite reviste din țară și din străinătate. Între preocupările sale, matematica didactică și matematica pentru concursuri și olimpiade sunt pe un loc special. Ocupă locul 85 în topul colaboratorilor *Gazetei Matematice* de la înființare până în prezent (peste 120 de ani de apariție neîntreruptă), luând în considerare numărul problemelor și articolelor publicate în această revistă. Prezența sa permanentă în comisiile centrale ale olimpiadelor naționale de matematică constituie un reper pentru comunitatea profesorilor români preocupați de matematică din învățământul preuniversitar.

Paul-Mihai Șușoi este profesor gradul I la Colegiul Național „C.D. Loga" din Caransebeș. Este doctor în științe matematice. A publicat numeroase lucrări metodico-științifice și este autor (coautor) de culegeri de probleme pentru pregătirea elevilor la examenele naționale. A participat la conferințe și simpozioane naționale și internaționale, a publicat în reviste de specialitate articole științifice și metodice. A fost inspector de specialitate (disciplina Matematică) și inspector școlar general la I.Ș.J. Caraș-Severin. Este directorul Centrului Județean de Excelență Caraș-Severin pentru pregătirea elevilor capabili de performanță și profesor metodist.

Nicolae Stăniloiu este profesor gradul I la Școala Gimnazială Nr. 1 Bocșa. Colaborator la *Gazeta Matematică – seria B* și la alte reviste, a publicat numeroase articole și note matematice cu precădere în *Revista de matematică a elevilor și profesorilor* din Caraș-Severin. Este coautor al unei culegeri de teste de matematică pentru examenul de Evaluare Națională. A participat la conferințe și simpozioane naționale și internaționale. A fost inspector de specialitate (disciplina Matematică) și profesor metodist în cadrul I.Ș.J. Caraș-Severin. În prezent, activează ca profesor la Centrul Județean de Excelență Caraș-Severin.

Camelia Pîrvu este profesor la Școala Gimnazială „Romul Ladea" din Oravița. Având 25 de ani de experiență la catedră și gradul I, este profesor metodist al I.Ș.J. Caraș-Severin. Este propunător de probleme la *Gazeta Matematică – seria B* și a participat la numeroase concursuri județene și interjudețene. De asemenea, a luat parte la numeroase conferințe și simpozioane naționale. În prezent, activează ca profesor la Centrul Județean de Excelență Caraș-Severin.

CAPITOLUL I
Programa pentru titularizarea profesorilor de matematică (în vigoare – 2020)

A. NOTĂ DE PREZENTARE

Prezentul document conține programa de Matematică pentru *Concursul național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor vacante/rezervate în învățământul preuniversitar* și se adresează absolvenților învățământului superior de specialitate, care se prezintă la acest concurs.

Ca disciplină școlară, *Matematica* face parte din aria curriculară *Matematică și Științe ale naturii*. Programa pentru concurs este elaborată luând în considerare și programele școlare în vigoare din învățământul preuniversitar, respectiv programele pentru evaluările și examenele naționale la disciplina *Matematică*.

Programa este în concordanță cu profilul absolventului de învățământ superior care urmează să fie titularizat în învățământul preuniversitar, competențele și conținuturile din programă fiind proiectate în conformitate cu abordarea curriculară sistemică a activităților didactice. Din această perspectivă aspectele fundamentale vizate prin această programă sunt:

- utilizarea conținuturilor științifice de specialitate fundamentale și a conexiunilor pe care *Matematica* le are cu alte discipline studiate în gimnaziu și în liceu;
- aplicarea conceptelor de bază și a principiilor didacticii generale și ale metodicii predării matematicii în gimnaziu și în liceu în contexte educaționale specifice.

Această programă are în vedere **competențe** asociate atât conținuturilor științifice de specialitate, cât și conținuturilor metodicii predării matematicii, competențe pe care profesorul de matematică trebuie să și le formeze, să le dezvolte și să le probeze pe parcursul desfășurării activității didactice și care sunt evaluate în cadrul *Concursului național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor vacante/rezervate în învățământul preuniversitar*.

Competențele de evaluat asociate conținuturilor științifice de specialitate fundamentale și a conexiunilor pe care *Matematica* le are cu alte discipline studiate în învățământul preuniversitar

1. Identificarea unor date, concepte, relații specifice matematicii și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual specifice matematicii cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor, algoritmilor și a procedurilor specifice matematicii pentru a caracteriza local sau global o situație concretă
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a caracteristicilor cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora
5. Analizarea și interpretarea caracteristicilor unor relații sau procese specifice matematicii pornind de la situații reale sau ipotetice
6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii

Competențele de evaluat asociate conceptelor de bază și principiilor didacticii generale și ale metodicii predării matematicii în gimnaziu și în liceu

1. Identificarea strategiilor didactice adaptate particularităților de vârstă și individuale ale elevilor în vederea utilizării acestora în procesul de predare-învățare-evaluare la *Matematică*
2. Proiectarea activității didactice, la disciplina *Matematică*, pentru o unitate de învățare, un curriculum la decizia școlii etc.
3. Asigurarea concordanței între metodele de evaluare, competențele specifice, conținuturile și instrumentele de evaluare, în cadrul unei activități didactice la disciplina *Matematică*

4. Exprimarea în limbaj specific a caracteristicilor strategiilor didactice alese la disciplina *Matematică* pentru realizarea unei activități didactice interactive, stimulative, participative

5. Analizarea activității didactice proiectate la disciplina *Matematică*, în vederea corelării acesteia cu particularitățile de vârstă și individuale ale elevilor

6. Adecvarea metodelor și a instrumentelor de evaluare la competențele specifice vizate și la conținuturile asociate pentru realizarea unor activități didactice interactive, stimulative, participative la disciplina *Matematică*

B. TEMATICA ȘTIINȚIFICĂ PENTRU DISCIPLINA *MATEMATICĂ*

Algebră (cu elemente de logică matematică, teoria mulțimilor, aritmetică, teoria probabilităților și statistică)

Propoziții. Operatori logici. Predicate. Cuantificator universal și cuantificator existențial. Mulțimi. Operații cu mulțimi. Mulțimi de numere ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Metoda inducției matematice. Relații binare. Relații de ordine. Relații de echivalență, clase de echivalență. Numere cardinale. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimi numărabile și mulțimi de puterea continuului.

Funcții. Funcții injective, surjective, bijective. Compunerea funcțiilor. Funcții inversabile, inversa unei funcții. Funcții reale de variabilă reală; operații; graficul unei funcții, axe de simetrie, centre de simetrie. Funcții monotone, mărginite, periodice, pare, impare, convexe, concave. Șiruri de numere reale. Șiruri recurente. Progresii aritmetice și progresii geometrice. Numere naturale și numere întregi. Teorema împărțirii cu rest. Divizibilitate. Criterii de divizibilitate. Numere prime. Teorema fundamentală a aritmeticii. *C.m.m.d.c.*, *c.m.m.m.c.* a două sau mai multor numere întregi. Algoritmul lui Euclid pentru determinarea *c.m.m.d.c.* a două numere întregi. Ecuații diofantice: $ax + by = c$; $x^2 + y^2 = z^2$.

Probleme de numărare. Principiul includerii și excluderii. Principiul produsului cartezian. Permutări, aranjamente, combinări. Binomul lui Newton.

Evenimente aleatoare, operații cu evenimente. Probabilitatea unui eveniment în cazul evenimentelor elementare egal probabile (cazul finit). Probabilități condiționate. Evenimente independente. Scheme clasice de probabilitate (Poisson și Bernoulli). Variabile aleatoare discrete. Date statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Eșantionare. Frecvență. Medii. Dispersie.

Radicalul de ordinul n dintr-un număr real. Puteri cu exponent rațional și puteri cu exponent real. Funcția exponențială și funcția logaritmică.

Numere complexe. Forma algebrică, modulul și conjugatul unui număr complex. Forma trigonometrică a unui număr complex. Operații cu numere complexe. Formula lui Moivre. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome. Interpretări geometrice ale operațiilor cu numere complexe. Aplicații în geometrie ale numerelor complexe.

Legi de compoziție. Asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile. Monoid, grup, subgrup. Morfisme și izomorfisme de grupuri. Teorema lui Lagrange. Grup ciclic. Ordinul unui element într-un grup. Teorema lui Cauchy. Grupul permutărilor de grad n. Signatura unei permutări. Cicli. Descompunerea unei permutări în produs de cicli disjuncți.

Inel unitar, subinel, divizori ai lui zero. Inel integru. Grupul unităților unui inel. Caracteristica unui inel. Inelul claselor de resturi modulo n. Indicatorul lui Euler. Mica teoremă a lui Fermat, teorema lui Euler, teorema lui Wilson. Corp, subcorp. Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri. Lema chinezească a resturilor.

Inelul polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienți într-un inel comutativ. Gradul unui polinom. Funcție polinomială. Teorema împărțirii cu rest pentru polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Divizibilitate, asociere în divizibilitate, *c.m.m.d.c.* și *c.m.m.m.c.* a două sau mai multor polinoame, algoritmul lui Euclid pentru determinarea *c.m.m.d.c.* a două polinoame. Rădăcinile unui polinom cu coeficienți într-un inel integru. Schema lui Horner. Teorema lui Bézout. Polinoame cu coeficienți complecși. Teorema fundamentală a algebrei. Rădăcini multiple. Derivata formală a unui polinom. Formula lui Taylor pentru polinoame cu coeficienți într-un corp de caracteristică zero. Teorema de caracterizare a rădăcinilor multiple pentru un polinom cu coeficienți într-un corp de caracteristică zero. Relațiile lui Viète. Polinoame cu coeficienți reali, raționali, întregi. Polinoame ireductibile.

Spațiu vectorial, subspațiu. Dependență liniară, independență liniară, sistem de generatori. Bază a unui spațiu vectorial. Aplicație liniară. Matrice cu elemente într-un inel comutativ. Operații cu matrice. Transpusa unei matrice. Determinantul de ordinul *n*. Proprietăți ale determinanților. Determinantul produsului a două matrice. Matrice inversabilă, inversa unei matrice. Matricea asociată unei aplicații liniare.

Sisteme de ecuații liniare. Teorema lui Cramer. Rangul unei matrice cu elemente într-un corp comutativ. Teorema Kronecker-Capelli. Sisteme omogene. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.

Graf, graf arbore. Distanță, drumuri, lungimea unui drum.

Geometrie și trigonometrie

Punct, dreaptă, plan; axiome de incidență.

Segment, triunghi, semidreaptă, semiplan, unghi, poligon, poligon convex.

Distanța dintre două puncte. Lungimea unui segment, măsura unui unghi. Congruența segmentelor, a unghiurilor și a triunghiurilor. Inegalități între laturile și unghiurile unui triunghi.

Drepte paralele în plan, axioma de paralelism, perechi de unghiuri congruente formate de o secantă cu două drepte paralele. Suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi. Patrulatere: paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat, trapez. Linii importante într-un triunghi. Concurența medianelor, înălțimilor, mediatoarelor, respectiv bisectoarelor într-un triunghi.

Teorema lui Thales. Asemănarea triunghiurilor. Relații metrice într-un triunghi. Teorema lui Menelaus și teorema lui Ceva.

Cercul. Cercul înscris și cercul circumscris unui triunghi. Coarde, arce și unghiuri în cerc. Puterea unui punct față de un cerc, axă radicală a două cercuri. Poligoane înscrise sau circumscrise unui cerc, poligoane regulate. Lungimea cercului și lungimea arcului de cerc.

Aria suprafețelor poligonale plane. Aria discului și aria sectorului de cerc.

Drepte paralele în spațiu, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele. Unghiul a două drepte, drepte perpendiculare. Dreaptă perpendiculară pe un plan, teorema celor trei perpendiculare, plane perpendiculare. Proiecții. Unghiul unei drepte cu un plan, unghiul a două plane. Distanța de la un punct la un plan. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare, distanța dintre două drepte.

Corpuri poliedrale: prisma, piramida, trunchiul de piramidă. Corpuri de rotație: sfera, cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept. Secțiuni cu un plan. Arii și volume.

Vectori în plan și în spațiu. Operații cu vectori: adunarea, înmulțirea cu numere reale, produsul scalar, produsul vectorial. Vectori de poziție. Repere carteziene pe dreaptă, în plan și în spațiu. Ecuațiile dreptelor în plan și în spațiu. Ecuațiile planului.

Condiții de coliniaritate, paralelism și perpendicularitate în plan și în spațiu, condiții de coplanaritate. Determinarea unghiului a două drepte, a două plane, dintre dreaptă și plan. Distanța de la un punct la o dreaptă în plan și în spațiu. Distanța de la un punct la un plan. Aria unui triunghi. Volumul unui tetraedru.

Ecuațiile cercului. Ecuația carteziană redusă a elipsei, a hiperbolei, a parabolei. Tangente la cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă.

Funcții trigonometrice, formule fundamentale, funcții trigonometrice inverse. Ecuații trigonometrice. Aplicații ale trigonometriei în geometrie.

Locuri geometrice.

Analiză matematică

Mulțimea numerelor reale: structura algebrică, structura de ordine. Mulțimi mărginite. Axioma lui Cantor-Dedekind. Vecinătăți. Puncte interioare, aderente, de acumulare. Mulțimi deschise, închise, compacte. Dreapta reală încheiată.

Șiruri de numere reale. Subșir. Limita unui șir. Convergența șirurilor monotone și mărginite. Criterii de majorare, criteriul cleștelui, trecerea la limită în inegalități. Operații cu șiruri care au limită, cazuri de

CAPITOLUL II
CONSIDERAȚII PRIVIND ELABORAREA ITEMILOR DE EVALUARE (CLASIFICARE, CARACTERISTICI, CERINȚE)

II.1. TIPOLOGIA ITEMILOR DE EVALUARE

Itemul de evaluare reprezintă cea mai mică componentă identificabilă a unui test sau a unei probe de evaluare, care vizează evaluarea elevului în condiții de maximă rigurozitate.

Itemii de evaluare se împart în trei categorii:

1. **itemi obiectivi:**
   a) itemi cu alegere duală;
   b) itemi de tip pereche;
   c) itemi cu alegere multiplă.
2. **itemi semiobiectivi:**
   a) itemi cu răspuns scurt/de completare;
   b) întrebarea structurată.
3. **itemi subiectivi:**
   a) itemi de tip rezolvare de probleme.

II.2. TESTAREA PRIN ITEMI OBIECTIVI – descriere (după I. Neacșu, A. Stoica, 1996)

- Itemii obiectivi realizează o structurare a sarcinilor propuse elevilor în concordanță cu competențele specifice pe care testele de progres școlar, în special cele standardizate, și le asumă.
- Construirea unor itemi de o calitate superioară, corect formulați și adecvați competențelor propuse este o adevărată artă. Elementele specifice ale acestui proces creativ au un fundament teoretic ce se bazează în primul rând pe cunoașterea și stăpânirea principiilor și tehnicilor de proiectare a acestor itemi, precum și pe valorificarea și potențarea avantajelor pe care le oferă profesorului.
- Trăsătura caracteristică a itemilor obiectivi o constituie, așa cum sugerează și denumirea lor, **obiectivitatea** ridicată în evaluarea rezultatelor învățării, chiar dacă acestea se situează de obicei în zona inferioară a domeniului cognitiv.
- Punctajul corespunzător se acordă sau nu se acordă în funcție de marcarea răspunsului corect la item; acest tip de item poate fi folosit pentru orice disciplină – cu grad de utilitate diferit, în funcție de scopul testului din care face parte, competențele specifice și conținuturile evaluate – ceea ce îi oferă un avantaj deosebit asupra celorlalți itemi.

a) Itemi cu alegere duală

Procedura se caracterizează prin solicitarea elevilor de a asocia unul sau mai multe enunțuri cu una din componentele unor cupluri de alternative duale cum ar fi: adevărat/fals, corect/greșit, da/nu, acord/dezacord, enunț factual/enunț de opinie.

Avantaje și limite ale utilizării itemilor cu alegere duală

Principalul avantaj este acela al abordării, într-un interval de timp redus, a unui volum mare de finalități ale învățării; de obicei complexitatea acestor itemi este medie sau redusă.

Unul dintre cele mai întemeiate dezavantaje ale acestei tehnici este acela că identificarea unui enunț ca fiind incorect/neadevărat nu implică în mod necesar cunoașterea de către elev a alternativei adevărate.

Recomandări pentru construirea itemilor cu alegere duală

1. Vor fi evitate enunțurile cu caracter general, atunci când se solicită aprecierea lor drept adevărate sau false.
2. Vor fi evitate enunțuri nerelevante din punct de vedere matematic.
3. Vor fi evitate enunțuri a căror structură poate genera ambiguități sau dificultăți de înțelegere.
4. Vor fi evitate enunțurile lungi, complexe, cu amănunte/date inutile.
5. Va fi evitată introducerea a două sau mai multe idei într-un enunț (cu excepția situațiilor în care se urmărește cunoașterea sau înțelegerea unor relații de tip cauză–efect).

Exemple de itemi

Vom da două exemple: unul ce vizează conținuturi de gimnaziu și unul pentru liceu.

Exemplul 1. Tema: *Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi* (clasa a VI-a)
Competență specifică și activități de învățare: aplicarea corectă a teoremei referitoare la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.
Enunț: Dacă apreciezi că rezultatul este adevărat încercuiește litera **A**, în caz contrar încercuiește litera **F**.

1. Dacă triunghiul ABC, dreptunghic în A, are unghiul B de măsură 44°, atunci unghiul C are măsura de 46°. **A** **F**

2. Fie triunghiul ABC cu $[AE$ și $[BF$ bisectoare interioare, $\sphericalangle BAE = 30°$ și $\sphericalangle ABF = 20°$. Atunci $\sphericalangle ACB = 90°$. **A** **F**

Răspuns: **1.** A. **2.** F; răspuns corect $\sphericalangle ACB = 80°$.

Exemplul 2. Tema: *Teorema lui Fermat* (clasa a XI-a)
Competență specifică și activități de învățare: aplicarea corectă a teoremei lui Fermat.
Enunț: Dacă apreciezi că afirmația este adevărată încercuiește litera **A**, în caz contrar litera **F**.

1. Teorema lui Fermat este aplicabilă funcției $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$ în cazul $x \in [-4, -2]$. **A** **F**

2. Fie $a, b, c, d > 0$, astfel încât: $a^x + b^x + c^x + d^x \geq 4$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$; atunci $abcd = 1$. **A** **F**

Răspuns: **1.** F. Se observă că funcția f este descrescătoare pe $[-4, -2]$ și atunci are un minim (global) în punctul $(-2, 8)$ și un maxim (global) în punctul $(-4, 30)$. Cum $-2, -4 \notin (-4, -2)$, condițiile teoremei lui Fermat nu sunt satisfăcute. **2.** A. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x + c^x + d^x - 4$. Din ipoteză $f(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, cu $f(0) = 0$, adică $f(0) \leq f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, și cum f este derivabilă, $x_0 = 0$ este punct de minim local $\Rightarrow f'(0) = 0$. Conform teoremei lui Fermat $\Rightarrow \ln(abcd) = 0 \Rightarrow abcd = 1$.

b) Itemi de tip pereche – descriere (I. Neacșu, A. Stoica, 1996)

Tehnica perechilor propune elevilor stabilirea unor corespondențe între cuvinte, propoziții, numere, litere, fraze sau alte categorii de simboluri, distribuite pe două coloane. Prima coloană conține așa numitele premise (enunțuri), iar cele din coloana a doua reprezintă răspunsurile. Criteriile pe baza cărora se stabilește răspunsul corect sunt enunțate/explicitate în instrucțiunile care preced coloanele de premise și de răspunsuri.

Itemii de tip pereche se caracterizează prin măsurarea abilității de a identifica relația existentă între două categorii:

- termeni – definiții;
- simboluri – concepte;
- reguli – exemple;
- metode – exemplificări.

Avantaje și limite ale aplicării itemilor de tip pereche

Aplicarea acestor itemi permite abordarea unui foarte important volum de rezultate de învățare într-un interval redus de timp, cu folosirea eficientă a spațiului pe foile de test, cât și cu utilizarea eficientă a timpului profesorului la notare.

Ușurința construcției itemilor este de asemenea un avantaj, cu toate că este corect să precizăm faptul că este mai ușor de construit un item de calitate slabă decât unul de bună calitate.

Unul dintre dezavantaje constă în faptul că această tehnică nu poate fi utilizată pentru abordarea unor conținuturi și rezultate complexe, fiind de asemenea dificil, în unele cazuri, să construim liste de premise (ipoteze) sau de răspunsuri care să fie omogene.

Recomandări pentru construirea itemilor de tip pereche

1. Se recomandă să fie inclus un număr inegal de răspunsuri și premise, iar elevii să știe că fiecare răspuns poate fi folosit o singură dată, de mai multe ori sau niciodată.
2. Prezentarea răspunsurilor să fie făcută într-o ordine logică – această cerință vizează de fapt eliminarea furnizării unor indicii care ar putea conduce elevul la „ghicirea” răspunsului corect.
3. Toate premisele și răspunsurile unui item de același tip să fie plasate pe aceeași pagină.

Exemple de itemi

Prezentăm exemple pentru două teme extrase din secvențe ale programelor școlare pentru gimnaziu, respectiv pentru liceu.

Exemplul 1. Tema: *Funcția liniară* (clasa a VIII-a)

Competență specifică și activități de învățare: identificarea punctelor care aparțin graficului unei funcții date.

Enunț: Stabilește corespondența corectă între cele două coloane:

1.

A	**B**
1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$	a) $M(2, 0)$
2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$	b) $N(-1, 3)$
3. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$	c) $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$
4. $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i(x) = 7$	d) $Q(2, 3)$
	e) $R(1, 7)$
	f) $S(0, -1)$

2.

A	**B**
1. Intersecția cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$	a) $A(0, 2)$
2. Intersecția cu axa Oy a graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$	b) $B(3, 0)$
3. Intersecția graficelor funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2x + 1$ se realizează în punctul:	c) $C(2, 3)$
	d) $D(-3, -5)$

Răspuns: **1.** 1 → *d*); 2 → *f*); 3 → *a*); 4 → *e*); de exemplu: $f(2) = 2 + 1 \Rightarrow Q(2, 3) \in G_f$. **2.** 1 → *b*); 2 → *a*); 3 → *d*); $G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$; $G_g \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow A(0, 2)$; se formează sistemul $\begin{cases} y = x - 2; \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ care implică $D(-3, -5)$.

Exemplul 2. Tema: *Funcții integrabile* (clasa a XII-a)

Competență specifică și activități de învățare: determinarea punctelor de continuitate pentru funcții date pentru a preciza proprietățile acestora.

Enunț: Stabilește corespondența corectă între cele două coloane:

1.

A	**B**
1. Funcția *f* este continuă.	a) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\dfrac{x+1}{2}\right]$;
2. Funcția *f* admite primitive.	b) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, 0 \le x \le 1 \\ 3x, \quad 1 < x \le 4 \end{cases}$;
3. Funcția *f* este monotonă.	c) $f : [5, 7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, -5 \le x \le 1 \\ x^2 - 1, 0 < x \le 7 \end{cases}$.
4. Funcția *f* este integrabilă.	
5. Funcția *f* are proprietatea lui Darboux.	

2.

A	**B**
1. Funcția *f* are proprietatea lui Darboux.	a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x \ne 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$;
2. Funcția *f* nu admite primitive; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$.	b) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$;
3. Funcția *f* este integrabilă.	c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
	d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1}, x \ge 0 \end{cases}$.

Răspuns:

1. 1 → *c*); 2 → *c*); 3 → *a*), *b*), *c*); 4 → *a*), *b*), *c*); 5 → *c*).

2. 1 → *a*):

- Dacă $0 \notin [x_1, x_2]$ atunci: $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ este continuă pe intervalul $[x_1, x_2] \Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux pe acest interval.
- Dacă $0 \in [x_1, x_2]$ fie $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $(\lambda - f(x_1))(\lambda - f(x_2)) < 0$ (adică λ este cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$). Șirul: $x_n = \dfrac{1}{\arcsin\lambda + 2n\pi}$ are limita zero și deci există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n_0} \in (x_1, x_2)$ cu $f(x_{n_0}) = \lambda$.
- Dacă $0 \in \{x_1, x_2\}$, fie de exemplu: $0 = x_1 < x_2$ și pentru $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lambda(\lambda - f(x_2)) < 0$, considerând același șir $x_n = \dfrac{1}{\arcsin\lambda + 2n\pi}$ cu limita zero, deducem că și în acest caz există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n_0} \in (0, x_2)$ cu $f(x_{n_0}) = \lambda$. Aceste observații arată că *f* are proprietatea lui Darboux.

2 → *c*): Se observă că imaginea intervalului $(\sqrt{8}, \sqrt{10})$ prin *f* nu este interval, deoarece: $f(\sqrt{8}) = 16\sqrt{2} < < 27 < f(\sqrt{10}) = 10\sqrt{10}$, iar $f(x) \ne 27$, $(\forall)\ x \in (\sqrt{8}, \sqrt{10})$. Deci funcția nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ (nu are proprietatea lui Darboux).

CAPITOLUL III
MODELE DE TESTE PENTRU CONCURSUL DE TITULARIZARE

TESTUL 1

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$.

5p a) Determinați Im f.

5p b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care funcția își atinge minimul.

5p c) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, arătați că $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + 3n \geq 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c. Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu G centrul de greutate, cu H ortocentrul și cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

5p a) Arătați că $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

5p b) Arătați că $\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}$.

5p c) Arătați că $OI = \dfrac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ și $9\cdot OG^2 = 9\cdot R^2-(a^2+b^2+c^2)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Q}$.

5p a) Verificați că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$ (relația Hamilton-Cayley).

5p b) Arătați că dacă ecuația $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ are o rădăcină reală egală cu $\sqrt{3}$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=-3$.

5p c) Arătați că dacă $\det(X^2-3I_2)=0$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, atunci $X^2=3I_2$.

2. Fie $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p a) Reprezentați grafic funcția f (fără a utiliza f'').

5p b) Folosind monotonia lui f, decideți care dintre numerele $a=3^{\sqrt{5}}$ și $b=5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

5p c) Calculați integrala lui f pe intervalul $[1, e^2]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

COMPETENȚE SPECIFICE	CONȚINUTURI
1. **Recunoașterea** funcției de gradul I descrisă în moduri diferite 2. **Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 3. **Descrierea** unor proprietăți desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul I sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie prin funcții de gradul I, ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații 5. **Interpretarea** graficului funcției de gradul I utilizând proprietățile algebrice ale funcției 6. **Rezolvarea** cu ajutorul funcțiilor a unei situații problemă și interpretarea rezultatului	**Funcția de gradul I** • Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x)=0$ • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției • Inecuații de forma $ax+b\le 0$ ($\ge$, $<$, $>$), $a, b\in\mathbb{R}$, studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, a, b, c, m, n, p numere reale

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$; monotonie; semn”, care să cuprindă 5 itemi: *un item cu alegere duală, un item cu alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată, un item de tip pereche și un item cu răspuns scurt/de completare*, menționând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Notă: Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor specifice evaluate, respectarea formatului itemilor, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

TESTUL 2

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1. Se consideră numărul real $\omega = 2 + \sqrt{3}$ și mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Notăm: $\overline{\omega} = 2 - \sqrt{3}$ și cu $G = \{z \in M \mid (\exists)\ y \in M$, astfel încât $yz = 1\}$.

5p a) Verificați că $\omega^2 = 4\omega - 1$ și arătați că $\omega \in G$.

5p b) Arătați că $(a + b\omega)(a + b\overline{\omega}) \in \mathbb{Z}$ și că mulțimea G are cel puțin 2006 elemente.

5p c) Arătați că $\omega^{2006} \notin \mathbb{Q}$.

2. Se consideră un triunghi ABC și punctele $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ și $D \in (BC)$, astfel încât segmentele (AD), (BE) și (CF) să fie concurente în P. Notăm cu S_{XYZ} aria triunghiului XYZ.

5p a) Arătați că $\frac{FA}{FB} = \frac{S_{PAF}}{S_{PBF}}$; $\frac{EC}{EA} = \frac{S_{PEC}}{S_{PEA}}$; $\frac{DB}{DC} = \frac{S_{PDB}}{S_{PDC}}$; $\frac{S_{PBD}}{S_{PAE}} = \frac{PB \cdot PD}{PA \cdot PE}$.

5p b) Arătați că $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DB}{DC} = 1$ (teorema lui Ceva).

5p c) Arătați că dacă punctele I, J, K sunt situate pe laturile triunghiului RST, $I \in (RS)$, $J \in (ST)$ și $K \in (RT)$, astfel încât $\frac{IR}{IS} \cdot \frac{JS}{JT} \cdot \frac{KT}{KR} = 1$, atunci segmentele (IT), (JR) și (KS) sunt concurente.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $f(X) = X^3$.

5p a) Determinați rangul matricei A și A^3 și arătați că dacă $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $Y \cdot A = A \cdot Y$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

5p b) Găsiți două matrice $U \neq V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$astfel încât $f(U) = f(V)$.

5p c) Demonstrați că ecuația $f(X) = A$ nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$ și $g : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \neq 0$, și dovediți că g este bijectivă.

5p b) Aplicând funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x]$, $x > 0$, arătați că există un unic $c_x \in (0, x)$ astfel încât $e^x = g(c_x)$.

5p c) Fie $c:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $c(x)=c_x$, unde c_x este numărul definit la b). Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c(x)}{x}=\frac{1}{2}$ și $\int_0^{\ln 2e} c(x)\cdot e^x\cdot dx=e.$

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

COMPETENȚE SPECIFICE	CONȚINUTURI
1. **Identificarea** unor elemente de geometrie vectorială în diferite contexte 2. **Aplicarea** regulilor de calcul pentru determinarea caracteristicilor unor segmente orientate pe configurații date 3. **Utilizarea** operațiilor cu vectori pentru a descrie configurații geometrice date 4. **Utilizarea** limbajului calculului vectorial pentru a descrie anumite configurații geometrice 5. **Identificarea** condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică să verifice cerințele date 6. **Aplicarea** calculului vectorial în rezolvarea unor probleme din domenii conexe	**VECTORI ÎN PLAN** • Segment orientat, vectori, vectori coliniari • Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare; înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari; condiția de coliniaritate; descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Vectori în plan. Operații cu vectori”, care să cuprindă 6 itemi: *un item cu alegere duală, un item cu alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată, un item de tip pereche, un item cu răspuns scurt/de completare și un item de tip rezolvare de probleme*.

Notă: Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor specifice evaluate, respectarea formatului itemilor, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.