Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală: ....

....

MATE 2000+ Standard

EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Ionuţ Burcioiu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Gabriel Popa, Dorel Luchian, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea. - Ed. a 2-a. - Piteşti : Paralela 45, 2021
ISBN 978-973-47-3458-0

I. Popa, Gabriel
II. Luchian, Dorel
III. Zanoschi, Adrian
IV. Iurea, Gheorghe

51

Gabriel POPA
Dorel LUCHIAN
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

ediția a II-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD ®
aprofundare

Editura Paralela 45

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasa a VII-a şi de clasa a VIII-a, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii şcolare cu setul de competenţe impus de programă şi cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmăreşte trecerea de la formarea noţiunilor şi a deprinderilor elementare de operare cu acestea la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi la provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele iniţiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naţionale. Capitolele sunt împărţite în lecţii care pot fi parcurse în 1-3 ore şi se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecţiile încep cu o expunere detaliată şi temeinică a părţii teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării faţă de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecţiei, însoţite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanţat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Naţională, iar cele care depăşesc acest nivel – puţine la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluţii. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Naţională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învăţării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noştri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

TESTE INIŢIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $3(\sqrt{2}-1)-\sqrt{18}$ este:

A. –1 B. –3 C. $6\sqrt{2}$ D. $-6\sqrt{2}$

(0,5p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{3}=1\frac{5}{6}$ este:

A. $\frac{9}{5}$ B. 11 C. 9 D. 0

(0,5p) **3.** Valoarea lui m pentru care perechea (–2, 1) este soluţie a sistemului $\begin{cases}2x+3y=-1\\ mx-y=3\end{cases}$ este:

A. 3 B. 4 C. 1 D. –2

(0,5p) **4.** Lungimea segmentului având capetele $A(1, 2)$ şi $B(2, -1)$ este:

A. 4 B. 5 C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

(0,5p) **5.** Un romb $ABCD$ are $\sphericalangle BAD = 30°$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

A. 90° B. 120° C. 150° D. 60°

(0,5p) **6.** Un pătrat are aria egală cu 8 cm^2. Lungimea diagonalei sale este:

A. 8 cm B. 4 cm C. $2\sqrt{2}$ cm D. $4\sqrt{2}$ cm

(0,5p) **7.** Lungimea cercului având raza egală cu π cm este:

A. $2\pi^2$ cm B. 2π cm C. π^2 cm D. 4π cm

(0,5p) **8.** Aria hexagonului regulat având apotema egală cu $6\sqrt{3}$ cm este:

A. 108 cm^2 B. $72\sqrt{3}$ cm^2 C. 54 cm^2 D. $216\sqrt{3}$ cm^2

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Fie numerele $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}$ şi $b=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{5^2-4^2}$. Aflaţi media geometrică a celor două numere.

(1p) **2.** Preţul unui produs este 120 lei. După o scumpire, preţul devine 126 lei. Aflaţi cu ce procent s-a scumpit produsul.

(1p) **3.** Un trapez isoscel are lungimea bazei mari egală cu 12 cm şi lungimea liniei mijlocii egală cu 10 cm. Aflaţi lungimea segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor.

(1p)

4. În figura 1, triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, E este mijlocul laturii AB, iar AD este perpendicular pe BC ($D \in BC$). Se știe că $AD = 6\sqrt{2}$ cm și $\frac{CD}{BD} = 0{,}5$.

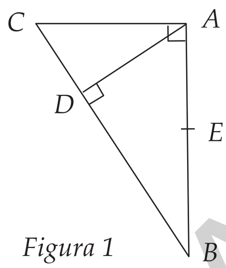


Figura 1

(1p) a) Aflați aria triunghiului ABC.

(1p) b) Aflați perimetrul triunghiului CDE.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(2\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}\right) \cdot 2^{-1}$ este:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 0

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr întreg, mai mare decât $4\sqrt{3}$, este:

A. 7 B. 6 C. 49 D. 8

(0,5p) **3.** Suma soluțiilor ecuației $|2x - 1| = 5$ este:

A. 5 B. 3 C. 1 D. –2

(0,5p) **4.** În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională.

x	0	1	a
$y = 2x - 1$	–1	1	5

Valoarea lui a este:

A. 9 B. –2 C. 3 D. 4

(0,5p) **5.** Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $\sqrt{18}$ cm este:

A. 3 cm B. 6 cm C. 9 cm D. 4 cm

(0,5p) **6.** Aria rombului $ABCD$ în care $AB = 10$ cm și $AC = 12$ cm este:

A. 192 cm^2 B. 120 cm^2 C. 60 cm^2 D. 96 cm^2

(0,5p) **7.** Fie un triunghi ABC și punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, astfel încât $PQ \parallel BC$. Dacă $AB = 16$ cm, $AP = 12$ cm, $QC = 3$ cm, atunci lungimea laturii AC este:

A. 9 cm B. 12 cm C. 6 cm D. 8 cm

(0,5p) **8.** Rezultatul calculului $8 \cos 60° \sin 30° - \text{tg } 45°$ este:

A. 2 B. –1 C. 1 D. 0

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Numerele naturale x, y, z verifică relațiile $\sqrt{x+1} = 2$ și $\sqrt{y(z+4)} = 3$. Aflați media aritmetică a celor trei numere.

(1p) **2.** Șapte caiete de matematică și cinci caiete dictando costă 41 lei. Aflați prețul fiecărui tip de caiet, știind că cel dictando costă cu un leu mai mult decât cel de matematică.

CAPITOLUL IV
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

IV.1. PUNCTE. DREPTE. PLANE

1. Punctul, **dreapta** şi **planul** sunt noţiunile fundamentale (de bază) ale geometriei în spaţiu. Ele sunt noţiuni abstracte (nu există în realitatea concretă, ci doar în imaginaţia noastră) şi primare (nu depind de alte noţiuni cunoscute, înţelegerea lor întemeindu-se pe intuiţie, pe comparaţie şi pe transpunerea în viaţa practică).

Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe o foaie de hârtie de un creion ascuţit. Punctul nu are dimensiuni, nu poate fi confundat cu o bulină.

Dreapta este comparabilă cu un fir de aţă bine întins, imaginat ca nesfârşit de lung, dar, spre deosebire de acesta, nu are grosime. Dreapta este o mulţime de puncte.

Planul este comparabil cu suprafaţa unei mese, nemărginită în toate direcţiile. Planul nu are grosime, conţine drepte şi este o mulţime de puncte.

În figura 1 sunt desenate un punct A, o dreaptă d şi un plan α.

Fig. 1

De obicei, notăm punctele cu litere mari şi dreptele cu litere mici din alfabetul latin, iar planele cu litere mici din alfabetul grec.

Planul, deşi este nemărginit, îl reprezentăm printr-o porţiune dreptunghiulară a sa care, în perspectivă, va apărea ca un paralelogram.

2. Propoziţii despre puncte, drepte, plane

P1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una; orice dreaptă conţine cel puţin două puncte.

Dacă punctele distincte A şi B aparţin dreptei d, atunci notăm dreapta d cu AB sau BA:

$A, B \in d, A \neq B \Rightarrow d = AB = BA$.

Spunem că două puncte distincte **determină** o dreaptă. În figura 3, punctele distincte A, B, C aparţin dreptei d, iar punctul D nu aparţine dreptei d.

Avem: $A, B, C \in d$, $D \notin d$; $d = AB$, $d = AC$ etc.

Punctele A, B, C sunt coliniare, iar punctele A, B, D sunt necoliniare.

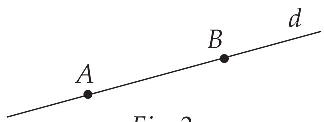


Fig. 2

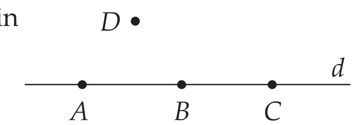


Fig. 3

P2. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la dreapta dată (**Axioma lui Euclid sau axioma paralelelor**). Acceptăm deci, implicit, că două drepte paralele sunt în acelaşi plan.

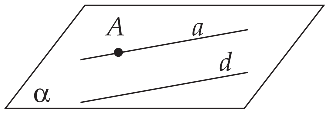


Fig. 4

Dacă $A \notin d$, există o unică dreaptă a, astfel încât $A \in a$ şi $a \parallel d$; dreptele a şi d se află în acelaşi plan (figura 4).

P3. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan şi numai unul care să le conţină; într-un plan există cel puţin trei puncte necoliniare.

Dacă punctele necoliniare A, B, C aparţin planului α, atunci notăm planul α cu (ABC) sau (ACB) sau (BAC) etc.

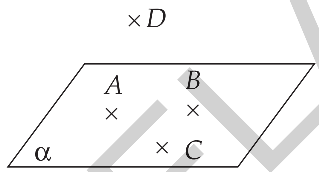


Fig. 5

Spunem că trei puncte necoliniare **determină** un plan.

În figura 5, punctele necoliniare A, B, C aparţin planului α, iar punctul D nu aparţine planului α.

Avem $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$; $\alpha = (ABC)$, $\alpha = (ACB)$, $\alpha = (BAC)$ etc.

Spunem că punctele A, B, C sunt **coplanare**, iar punctele A, B, C, D sunt **necoplanare**.

P4. Dacă două puncte distincte aparţin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în acel plan.

$A, B \in \alpha$, $A \neq B \Rightarrow AB \subset \alpha$ (figura 6).

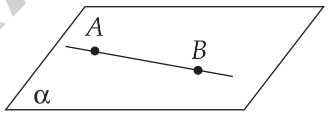


Fig. 6

P5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecţia lor este o dreaptă.

$A \in \alpha \cap \beta$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$ $(A \in d)$ (figura 7).

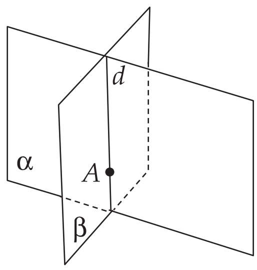


Fig. 7

3. Determinarea planului

I. Trei puncte necoliniare determină un plan.

Dacă A, B, C sunt necoliniare şi $A, B, C \in \alpha$, atunci $\alpha = (ABC)$ (figura 8).

II. O dreaptă şi un punct exterior ei determină un plan.

Dacă $A \notin d$ şi $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, atunci $\alpha = (A, d)$ (figura 9).

III. Două drepte concurente determină un plan.

Dacă $a \cap b = \{O\}$ şi $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 10).

IV. Două drepte paralele determină un plan.

Dacă $a \parallel b$ şi $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 11).

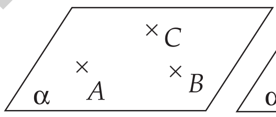


Fig. 8

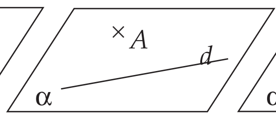


Fig. 9

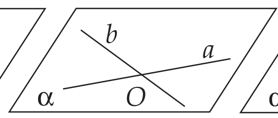


Fig. 10

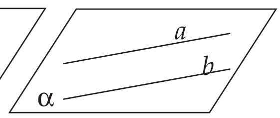
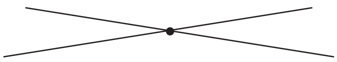


Fig. 11

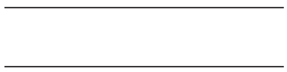
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Știm deja că, în plan, două drepte distincte pot fi concurente sau paralele.

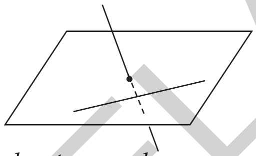
În spațiu, există drepte care, deși nu sunt paralele, nu au niciun punct comun (de exemplu, un om care stă drept, în mijlocul unei camere, având podeaua dreptunghiulară, ar putea sugera o dreaptă care nu este nici paralelă, nici nu are vreun punct comun cu una dintre marginile podelei). Două astfel de drepte se numesc necoplanare. Prin urmare, în spațiu, două drepte distincte pot fi: concurente, paralele sau necoplanare.



drepte concurente



drepte paralele



drepte necoplanare

Reamintim că două drepte concurente sau paralele sunt coplanare.

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 12 este reprezentat un plan α, trei puncte necoliniare, A, B, C, ce aparțin planului α și un punct D, exterior planului.

a) Stabiliți poziția dreptei AB față de planul α.

b) Arătați că punctele A, B, D determină un plan și găsiți intersecția acestuia cu planul α.

c) Care este poziția relativă a dreptelor AD și BC?

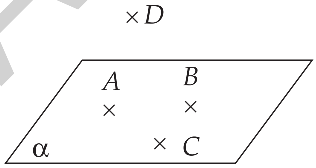


Fig. 12

Soluție: a) Deoarece punctele A și B sunt diferite și aparțin planului α, rezultă, conform propoziției P4, că dreapta AB este inclusă în planul α.

b) Punctele A, B, D sunt necoliniare, deoarece, în caz contrar, din relațiile $D \in AB$ și $AB \subset \alpha$, am obține $D \in \alpha$, fals. Așadar, punctele A, B, D determină un plan și $(ABD) \cap \alpha = AB$.

c) Dreptele AD și BC nu pot fi paralele sau concurente, pentru că atunci ele ar fi coplanare și asta ar însemna că D aparține planului α, ceea ce este fals. Prin urmare, dreptele AD și BC sunt necoplanare.

2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare (figura 13).

a) Demonstrați că oricare trei dintre aceste puncte sunt necoliniare.

b) Câte plane, care conțin cel puțin trei dintre punctele A, B, C, D există?

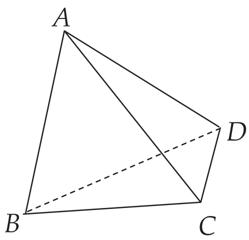


Fig. 13

Soluție: a) În primul rând, observăm că punctele A, B, C, D trebuie să fie distincte, căci, în caz contrar, ele ar fi coplanare. Dacă, de exemplu, A, B, C ar fi coliniare, atunci dreapta determinată de ele și punctul D ar aparține unui plan, deci punctele A, B, C, D ar fi

coplanare, fals. Prin urmare, punctele A, B, C, D sunt coplanare.
b) Sunt patru plane: (ABC), (ABD), (ACD) şi (BCD).

3. Considerăm patru puncte necoplanare A, B, C, D. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$ şi $\{E\} = MN \cap BC$, $\{F\} = NP \cap CD$, $\{G\} = MP \cap BD$ (figura 14). Demonstraţi că punctele E, F şi G sunt coliniare.

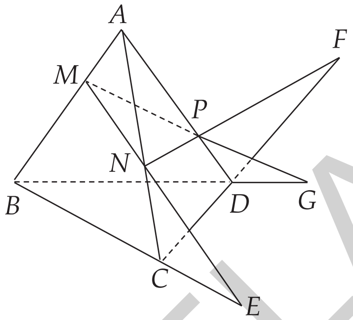


Fig. 14

Soluţie: Fie d dreapta de intersecţie a planelor (BCD) şi (MNP). Cum $E \in BC$ şi $BC \subset (BCD)$, rezultă că $E \in (BCD)$. Din relaţiile $E \in MN$ şi $MN \subset (MNP)$, deducem că $E \in (MNP)$. Aşadar $E \in d = (BCD) \cap (MNP)$. Analog arătăm că F şi G aparţin dreptei d. Prin urmare, punctele E, F şi G sunt coliniare, pentru că toate se află pe dreapta d.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = DB$. Calculaţi $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

2. În figura 15, punctele B şi C aparţin planului α, iar punctul A nu aparţine planului α. Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziţii:

P_1: $BC \subset \alpha$; P_2: $AB \subset \alpha$; P_3: punctele A, B, C determină un plan.

3. În figura 16, punctele necoliniare A, B, O aparţin planului α, punctul C este exterior planului α şi punctul O se află pe segmentul (CD).

a) Stabiliţi poziţia relativă a dreptelor AB şi CD şi poziţia punctului D faţă de planul α.

b) Determinaţi $(ABC) \cap \alpha$.

c) Determinaţi $(ACD) \cap (BOC)$.

4. În figura 17, dreptele a şi b sunt paralele şi $A, B \in a$, $C, D \in b$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctul P nu aparţine planului determinat de dreapta a şi punctul C. Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziţii:

P_1: O aparţine planului (a, b), determinat de dreptele a şi b;

P_2: $P \in (a, b)$; P_3: $(PAC) \cap (PBD) = PO$;

P_4: Intersecţia planelor (PAB) şi (PCD) este o dreaptă.

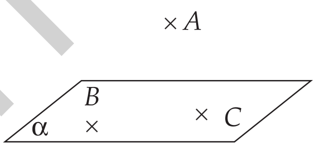


Fig. 15

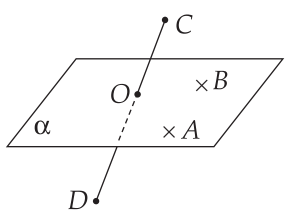


Fig. 16

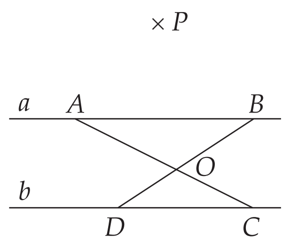


Fig. 17

5. În figura 18 sunt desenate patru puncte necoplanare A, B, C, D şi punctul $M \in (CD)$.

a) Câte drepte care conţin cel puţin două dintre punctele A, B, C, D, M există?

b) Câte plane sunt (unic) determinate de trei puncte alese dintre punctele A, B, C, D, M?

6. În figura 19 este reprezentat paralelogramul $ABCD$ şi punctul P situat în afara planului (ABC).

a) Găsiţi toate planele care conţin cel puţin trei dintre punctele A, B, C, D, P.

b) Determinaţi $(PAC) \cap (PBD)$.

c) Stabiliţi poziţiile relative ale următoarelor perechi de drepte: AB şi CD; AC şi BD; PA şi BC.

7. În figura 20 avem $A, B \in \alpha$, $O \notin \alpha$, $O \in (AC)$, $O \in (BD)$ şi $OA = 20$ cm, $OB = 15$ cm, $OC = 6$ cm, $OD = 5$ cm, $AB = 25$ cm.

a) Demonstraţi că punctele A, B, C, D sunt coplanare.

b) Calculaţi aria patrulaterului $ABCD$.

c) Stabiliţi dacă există vreun punct care să aparţină atât planului α cât şi dreptei CD.

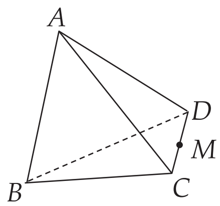


Fig. 18

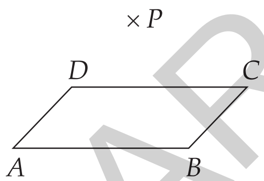


Fig. 19

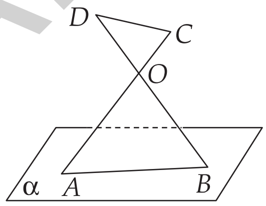


Fig. 20

8. În figura 21 sunt reprezentate două paralelograme $ABCD$ şi $AECF$ situate în plane diferite. Demonstraţi că dreptele BD şi EF sunt concurente şi că punctele B, F, D, E sunt coplanare.

9. Fie un paralelogram $ABCD$, O mijlocul lui BD şi punctul E, $E \notin (ABC)$. Demonstraţi că punctele A, C, E, O sunt coplanare.

10. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Fie M, N, P mijloacele segmentelor BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că planele (DAM), (DBN) şi (DCP) au o dreaptă comună.

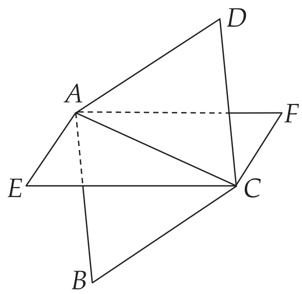


Fig. 21

CUPRINS