Marin Chirciu

INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE

DE LA INIŢIERE LA PERFORMANŢĂ

ÎNVĂŢARE DE EXCELENŢĂ®
supersucces

Cuprins

Considerații preliminare

„Un om de succes este acela care poate construi o fundație solidă cu cărămizile pe care alții le aruncă în el.”

David Charles Brink (n. 1939)

1. Notații

A, *B*, *C* – măsurile unghiurilor unui triunghi.
a, *b*, *c* – lungimile laturilor *BC*, *CA*, *AB*.
$h_a,\ h_b,\ h_c$ – lungimile înălțimilor.
$m_a,\ m_b,\ m_c$ – lungimile medianelor.
$l_a,\ l_b,\ l_c$ – lungimile bisectoarelor interioare.
$r_a,\ r_b,\ r_c$ – razele cercurilor exînscrise.
O – centrul cercului circumscris.
I – centrul cercului înscris.
H – ortocentrul.
G – centrul de greutate.
r – raza cercului înscris.
R – raza cercului circumscris.
S – aria triunghiului.
p – semiperimetrul.

2. Egalități (identități) remarcabile în triunghi

$$IG^2=\frac{1}{9}\left(p^2+5r^2-16Rr\right);\quad IH^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2;\quad IO^2=R^2-2Rr;$$

$$OH^2=9R^2+8Rr+2r^2-2p^2;\quad OG^2=R^2-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right);$$

$$\sum bc=p^2+r^2+4Rr;\quad \sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right);\quad \sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right);$$

$$\sum a^4=2\left[p^4-2p^2r(4R+3r)+r^2(4R+r)^2\right];\quad \prod(b+c)=2p\left(p^2+r^2+2Rr\right);$$

$$\sum b^2c^2=p^4-2p^2r(4R-r)+r^2(4R+r)^2;\quad \sum\frac{a}{b+c}=\frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}\ge\frac{3}{2};$$

$$\sum\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{2Rr}\ge 12;\quad \sum\frac{1}{p-a}=\frac{4R+r}{rp}\ge\frac{\sqrt{3}}{r};$$

$$\sum\frac{a}{p-a}=\frac{2(2R-r)}{r}\ge 6;\quad \sum\frac{a^2}{p-a}=\frac{4p(R-r)}{r}\ge 4p;\quad \sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}\ge\frac{3}{2};$$

$$\sum\frac{1}{a(p-a)}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rrp^2}\ge\frac{1}{Rr};\quad \sum(p-b)(p-c)=r(4R+r);$$

$$\sum\frac{bc}{p-a}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{p}\ge 4p;\quad \sum\frac{bc}{(p-b)(p-c)}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\ge 12;$$

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{p}{2Rr};\quad 4R\sum \sin\frac{A}{2} + r\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} = p\sum \frac{1}{\cos\frac{A}{2}};$$

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}};\quad \sum aAI^2 = \frac{abc}{p}\sum \cos\frac{A}{2};\quad \sum AI\cdot BI = \frac{abc}{p}\sum \sin\frac{A}{2};\quad I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2}.$$

3. Inegalităţi uzuale

$\sum \operatorname{tg} A \ge \frac{p}{r} \ge 3r \ge 3\sqrt{3}$ (în triunghiul ascuţitunghic); $\sum \operatorname{tg}^2 A \ge 9$ (în triunghiul ascuţitunghic); $\prod \operatorname{tg} A \ge 3\sqrt{3}$ (în triunghiul ascuţitunghic);

$$\sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} \ge \frac{1}{3};$$

$$\sum \operatorname{ctg} A \ge \frac{(R+r)^2}{S} \ge \sqrt{3};\quad \sum \operatorname{ctg}^2 A \ge 1;\quad \sum \operatorname{ctg}^n A \ge 3\cdot 3^{\frac{-n}{2}},\ n\in\mathbb{N};$$

$\prod \operatorname{ctg} A \le \frac{\sqrt{3}}{9}$ (în triunghiul ascuţitunghic);

$$\sum \frac{1}{\sin 2A} \ge \frac{9R^2}{2S} \ge \frac{p^2+(R+r)^2}{2S} \ge \frac{2(4R+r)}{p} \ge 2\sqrt{3};$$

$$\sum \sin\frac{A}{2} \le \frac{3}{2};\quad \sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \ge 6;\quad \sum \cos\frac{A}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{3};\quad \sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \ge 12;$$

$\sum \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le \frac{3}{4}$; $\sum \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \le \frac{9}{4}$; $\sum \frac{1}{\cos A} \ge 6$ (în triunghiul ascuţitunghic);

$\sum \sec A \ge 6$ (în triunghiul ascuţitunghic); $\sum \sec^2 A \ge 12$ (în triunghiul ascuţitunghic);

$\sum \sec A \sec B \ge 12$ (în triunghiul ascuţitunghic);

$$\sum \sec^2\frac{A}{2} \ge 4;\quad \sum \operatorname{cosec} A \ge 2\sqrt{3};\quad \sum \operatorname{cosec}^2 A \ge 4;\quad \sum \operatorname{cosec}\frac{A}{2} \ge 6;$$

$$\sum \operatorname{cosec}^2\frac{A}{2} \ge 12;\quad \sum \operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2} \ge 12;$$

$\frac{\sqrt{3}}{R} \le \sum \frac{1}{a} \le \frac{p}{3Rr} \le \frac{\sqrt{3}}{2r}$ (Petrovič).

capitolul 1

Inegalități cu unghiuri. Inegalitatea lui Jensen

„Ai mii de motive să eșuezi în viață, dar nici măcar o scuză."

Rudyard Kipling (1865–1936)

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile:

1.1. a) $0 < \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, în orice triunghi.

Period. Math. 1925, A. Padoa

b) $2 < \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, în triunghi ascuțitunghic.

c) $0 < \sin A + \sin B + \sin C < 1 + \sqrt{2}$, în triunghi obtuzunghic.

O. Bottema, Euclid 1954/55

1.2. a) $0 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$, în orice triunghi.

b) $2 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$, în triunghi ascuțitunghic.

c) $0 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$, în triunghi obtuzunghic.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk. 45, 1957/58

1.3. a) $\sin A + \sin B + \sin C \ge \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$. *O. Bottema, cdp*

b) Arătați că $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ dacă și numai dacă ΔABC este echilateral.

GM 3/2007, Vasile Berghea, Avrig, Sibiu

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2rp}{R^2}$.

d) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. *GM 12/2004, ****

e) $\sin 2A \sin 2B \sin 2C \le \frac{p}{4R}$. *GM 4/2015, Florin Rotaru, Focșani*

1.4. a) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \le 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$. *GMB 1963, Toma Albu, București*

soluţii 1

Inegalităţi cu unghiuri. Inegalitatea lui Jensen

„Nu contează cât de încet mergi, atâta vreme cât nu te oprești.”
Confucius (551–479 î.Hr.)

1.1. a) $\sum \sin A = \frac{a+b+c}{2R} \overset{(1)}{\le} \frac{3R\sqrt{3}}{2R} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, unde (1) $\Leftarrow$ $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \overset{\text{Leibniz}}{\le} 3\cdot 9R^2$.

1.2. a) $\sum \sin^2 A = \sum \frac{a^2}{4R^2} = \frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{4R^2} \overset{(1)}{\le} \frac{9}{4}$, unde (1) $\Leftarrow$ $2p^2 - 2r^2 - 8Rr \le 9R^2 \Leftrightarrow 2p^2 \le$ $\le 9R^2 + 2r^2 + 8Rr$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Într-adevăr $2p^2 \le 2(4R^2+4Rr+3r^2) \overset{(2)}{\le} 9R^2 + 2r^2 + 8Rr$, unde (2) $\Leftarrow$ $R^2 \ge 4r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$, evident din inegalitatea lui Euler.

1.3. a) $\sum \sin A = \sum \frac{a}{2R} = \frac{S}{Rr}$; $\sum \sin 2A = 2\sum \sin A \cos A = \frac{1}{R}\sum a\cos A = \frac{1}{R}\cdot\frac{2S}{R}$ $\Rightarrow$ Inegalitatea $\Leftarrow$ $\frac{S}{Rr} \ge \frac{2S}{R^2} \Leftrightarrow 2r \le R$, evident, inegalitatea lui Euler. b) Egalitatea în a) are loc dacă şi numai dacă $2r = R \Leftrightarrow$ triunghiul este echilateral. c) $\sum \sin 2A = 4\prod \sin A = 4\cdot\frac{abc}{8R^3} = \frac{4Rrp}{2R^3} =$ $= \frac{2rp}{R^2}$. d) Conform a) inegalitatea se scrie $\frac{2rp}{R^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow p \le \frac{3R^2\sqrt{3}}{4r}$, adevărată din inegalitatea lui Mitrinovič: $p \le \frac{3R\sqrt{3}}{2}$ şi inegalitatea lui Euler: $R \ge 2r$. e) $\prod \sin 2A = \prod 2\sin A\cos A =$ $= 8\prod \sin A \prod \cos A = 8\cdot\frac{rp}{2R^2}\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} \le \frac{p}{4R} \Leftrightarrow 4r\left(p^2-(2R+r)^2\right) \le R^3$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Rămâne de demonstrat că:
$4r\left(4R^2+4Rr+3r^2-4R^2-4Rr-r^2\right) \le R^3 \Leftrightarrow R \ge 2r$, inegalitatea lui Euler. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

1.4. a) Folosim $(x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $x=\sqrt{\sin A}$, $y=\sqrt{\sin B}$, $z=\sqrt{\sin C}$. $M_s = \sum\sqrt{\sin A} \le$ $\le \sqrt{3\sum \sin A} \le \sqrt{3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = M_d$. b) În c) luăm $\alpha = \frac{1}{n}$. c) $f(x) = \sin^{\alpha} x$ este concavă pe