c o l e c ț i a

concursuri
școlare

Lucrare elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare și avizată de Comisia Națională de Matematică din Ministerul Educației și Cercetării cu nr. 25216/1999 pentru folosirea în clasă și pregătirea suplimentară a elevilor.

*Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.*

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Cristina Miron
Tehnoredactare: Mioara Benza
Prepress: Marius Badea
Coperta colecției: Ionuț Broștianu

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**Matematică : olimpiade și concursuri școlare : 2015-2016 : clasele IX-XII /**
Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Dana-Mariana Paponiu, ... – Pitești : Paralela 45, 2016
ISBN 978-973-47-2400-0

I. Căiniceanu, Gheorghe (coord.)
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Paponiu, Dana-Mariana

51(076)

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Dana-Mariana Paponiu,
Carmen-Victorița Chirfot, Mariana Draga-Tătucu,
Iuliana Gimoiu, Gabriela Mălineanu,
Vasile-Doru Preșneanu, Elena Rîmniceanu

# matematică

## olimpiade și concursuri școlare

## clasele IX-XII

2015-2016

PARALELA 45
EDITURA

# ENUNȚURI

# clasa a IX-a

# 1. olimpiade

## ETAPA LOCALĂ

### Alba

**9.O.1.** Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

**9.O.2.** a) Determinaţi formula termenului general al şirului $(x_n)_{n\geq1}$, dacă $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+2n$, $\forall\, n\geq1$.

b) Demonstraţi că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+$, avem inegalitatea $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

**9.O.3.** Demonstraţi că:

a) $1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+...+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}<2$, $\forall\, n\geq1$, $n$ număr natural.

b) $P(n)$ : $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$, $n\geq1$, este o propoziţie adevărată, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

**9.O.4.** Fie $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil şi $H_1$, $H_2$, $H_3$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ ortocentrele triunghiurilor $CDE$, $DEF$, $EFA$, $FAB$, $ABC$, respectiv $BCD$. Demonstraţi că $H_1M_1$, $H_2M_2$, $H_3M_3$ sunt concurente.

### Arad

**9.O.5.** Dacă $a$ şi $b$ sunt numere întregi strict pozitive, atunci expresiile $a^2+4b$ şi $b^2+4a$ nu pot fi simultan numere perfecte.

**9.O.6.** Se consideră $\Delta ABC$ şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel încât $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=k$. Arătaţi că dreapta $MN$ trece prin centrul de greutate al $\Delta ABC$ dacă şi numai dacă $k=1$.

Eugen Rusu

**10.O.150.** a) Demonstraţi că există funcţii neperiodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{5}f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că orice funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{3}g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este periodică.

# ETAPA NAȚIONALĂ
## Târgu-Mureș, 20 aprilie 2016

**10.O.151.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Demonstraţi că funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+a_1^x\right)\cdot\left(1+a_2^x\right)\cdot...\cdot\left(1+a_n^x\right)$ este crescătoare.

**10.O.152.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

$(P1)$: $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$,

$(P2)$: $f\left(tx+(1-t)y\right) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$,

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ şi $t \in [0, 1]$.

a) Demonstraţi că, oricare ar fi $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât $d - c = b - a$, are loc inegalitatea:

$$f(b)+f(c) \leq f(a)+f(d).$$

b) Demonstraţi că $f\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+(n-2)\left(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} f(x_i+x_j)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

**10.O.153.** a) În planul complex de origine $O$, considerăm punctele $A$ şi $B$, de afixe nenule $a$ şi, respectiv, $b$. Arătaţi că $S_{[OAB]}=\frac{1}{4}|\overline{a}b-a\overline{b}|$, unde $S_{[OAB]}$ reprezintă aria triunghiului $OAB$.

b) Fie $ABC$ un triunghi echilateral înscris într-un cerc $\mathscr{C}$ de centru $O$. Pentru un punct $P$ interior cercului $\mathscr{C}$, notăm cu $S(P)$ aria triunghiului având lungimile laturilor egale cu distanţele de la $P$ la vârfurile triunghiului. Fie $P_1$ şi $P_2$ două puncte distincte interioare cercului $\mathscr{C}$. Arătaţi că $S(P_1) = S(P_2)$ dacă şi numai dacă $OP_1 = OP_2$.

**10.O.154.** Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele $A$ şi $B$. Cercetătorii au descoperit că, pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puţin trei poziţii corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele *ABBAA* şi *AAAAB* diferă în poziţiile 2, 3 şi 5, adică în trei poziţii. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstraţi că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left[\frac{2^n}{n+1}\right]$ cuvinte de lungime $n$ ($[a]$ este partea întreagă a numărului real $a$).

**11.O.146.** Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n + n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k - 1}$.

**11.O.147.** Demonstraţi că, dacă o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică şi are limită la $+\infty$, atunci ea este o funcţie constantă.

# ETAPA JUDEŢEANĂ ŞI A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI
# 19 martie 2016

**11.O.148.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\det(A^2 + A + I_2) = \det(A^2 - A + I_2) = 3$. Demonstraţi că: $\det A^2(A^2 + I_2) = 2I_2$.

**11.O.149.** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ şi $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $AC + kBD = I_n$ şi $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + kDB = I_n$ şi $DA = CB$.

**11.O.150.** Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f\left(x+\frac{1}{n}\right) \leq f(x)+\frac{1}{n}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{Z}^*$.

**11.O.151.** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care au proprietatea

$$\frac{f(x)-g(y)}{x-y}+|x-y| \geq 0, \text{ oricare ar fi } x, y \in I, x \neq y.$$

i) Demonstraţi că $f$ şi $g$ sunt funcţii crescătoare.

ii) Daţi exemplu de funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \neq g$ care verifică relaţia din ipoteză.

# ETAPA NAŢIONALĂ
# Târgu-Mureş, 20 aprilie 2016

**11.O.152.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface următoarele condiţii:

$$\det(A^{2014} - I_2) = \det(A^{2014} + I_2) \text{ şi } \det(A^{2016} - I_2) = \det(A^{2016} + I_2).$$

Demonstraţi că $\det(A^n - I_2) = \det(A^n + I_2)$, pentru orice număr natural nenul $n$.

# CUPRINS


enunțuri soluții

**clasa a IX-a**

Etapa locală....................5 ..............119
Etapa județeană și a municipiului București ....................22 ..............149
Etapa națională ....................22 ..............150
Concursuri interjudețene....................24 ..............152

**clasa a X-a**

Etapa locală....................33 ..............169
Etapa județeană și a municipiului București ....................49 ..............199
Etapa națională....................50 ..............200
Concursuri interjudețene....................51 ..............202

**clasa a XI-a**

Etapa locală....................61 ..............215
Etapa județeană și a municipiului București ....................81 ..............252
Etapa națională ....................81 ..............253
Concursuri interjudețene....................83 ..............256

**clasa a XII-a**

Etapa locală....................90 ..............269
Etapa județeană și a municipiului București ....................109 ..............302
Etapa națională....................109 ..............303
Concursuri interjudețene....................111 ..............306