colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Lucrare elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare și avizată de Comisia Națională de Matematică din Ministerul Educației și Cercetării cu nr. 25216/1999 pentru folosirea în clasă și pregătirea suplimentară a elevilor.

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Amalia Mărășescu
Tehnoredactare: Mioara Benza
Coperta colecției: Ionuț Broștianu
Prepress: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : olimpiade, concursuri școlare : 2015-2016 : clasele VII- VIII /
Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Dana-Mariana Paponiu, ... - Pitești : Paralela 45, 2016
ISBN 978-973-47-2399-7

I. Căiniceanu, Gheorghe (coord.)
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Paponiu, Dana-Mariana

51(076)

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Dana-Mariana Paponiu,
Carmen-Victorița Chirfot, Mariana Draga-Tătucu,
Iuliana Gimoiu, Gabriela Mălineanu,
Vasile-Doru Preșneanu, Elena Rîmniceanu

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele VII-VIII

2015-2016

PARALELA 45 EDITURA

clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. Se consideră numerele: $x = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 2015^2$ şi $y = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2016^2$. Folosind, eventual, relaţia $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, calculaţi numărul:

$$A = (y - x)[y + x - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2015 \cdot 2016)].$$

7.O.2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei $[AC]$. Paralela prin E la BD intersectează pe AB în M. Demonstraţi că:

a) ΔAMC este isoscel;

b) $ME = \dfrac{BD}{2}$ şi $CM = \dfrac{AB + CD}{2}$.

7.O.3. a) Arătaţi că are loc relaţia: $\dfrac{1}{2^k + 1} - \dfrac{1}{2^{k+1} + 1} = \dfrac{2^k}{(2^k + 1)(2^{k+1} + 1)}$; $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) Aflaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât: $\dfrac{2}{3 \cdot 5} + \dfrac{4}{5 \cdot 9} + \dfrac{8}{9 \cdot 17} + ... + \dfrac{2^n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2^{2015}}{2^{2016} + 1}$.

7.O.4. În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, se consideră bisectoarele $(AD$, respectiv $(CE$ cu $D \in (BC)$, $E \in (AB)$ şi punctul F, mijlocul lui (AC), astfel încât $EF \perp AC$.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Arătaţi că triunghiul ABP este isoscel, unde $AD \cap EF = \{P\}$.

Gazeta Matematică 9/2015

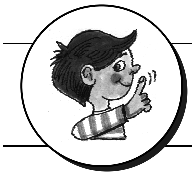
Arad

7.O.5. Enumeraţi elementele mulţimilor:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a = \sqrt{\frac{2-x}{4}},\ x \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ şi } B = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a = \sqrt{\frac{2-x}{9}},\ a \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Manual Matematică pentru clasa a VII-a, Editura Teora



ETAPA NAȚIONALĂ
Târgu-Mureș, 20 aprilie 2016

7.O.175. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ este natural.

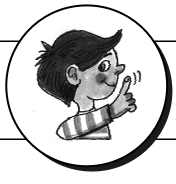
7.O.176. Se consideră triunghiul ABC, în care m($\sphericalangle B$) = 30° şi m($\sphericalangle C$) = 15°, iar M este mijlocul laturii $[BC]$. Fie punctul $N \in (BC)$, astfel încât $[NC] \equiv [AB]$. Arătaţi că $[AN$ este bisectoarea unghiului MAC.

7.O.177. Determinaţi numerele naturale p cu proprietatea că suma primelor p numere naturale nenule este un număr natural de patru cifre având descompunerea în factori primi $2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

7.O.178. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu m($\sphericalangle A$) = 90° şi punctul $M \in (BC)$, astfel încât m($\sphericalangle AMB$) = 75°. Pe bisectoarea interioară a unghiului MAC se ia un punct F, astfel încât $BF = AB$. Arătaţi că:

a) dreptele AM şi BF sunt perpendiculare;

b) triunghiul CFM este isoscel.



ETAPA NAȚIONALĂ
Târgu-Mureș, 20 aprilie 2016

8.O.177. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prismei, altele decât muchiile laterale. Arătaţi că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

8.O.178. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ şi $N \in (DA')$. Arătaţi că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' şi DA' dacă şi numai dacă $\dfrac{D'M}{D'C}=\dfrac{DN}{DA'}=\dfrac{1}{3}$.

8.O.179. Dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că:

$$\frac{3}{2}\le\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{a+c}{a+c+2b}+\frac{a+b}{a+b+2c}<\frac{5}{3}.$$

8.O.180. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, spunem că numerele naturale $x_1, x_2, ..., x_n$ au proprietatea (P), dacă

$$x_1x_2...x_n = x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n.$$

a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea (P).

b) Determinaţi numerele naturale $n \ge 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, ..., x_n$ cu $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$, care au proprietatea ($P$).

CUPRINS

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Pitești, jud. Argeș, cod 110174, str. Frații Golești 130
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 942.
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www. edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Everest*