

EDITURA PARALELA 45

colecția

concursuri
școlare

*Editura Paralela 45 este recunoscută de
Consiliul Național al Cercetării Științifice (CNCS)*

Referent științific: conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie – Universitatea din Craiova

Redactare: Amalia Mărășescu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuț Broștianu

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STRETCU, DANIEL**

Probleme de colorare pentru pregătirea concursurilor de matematică /
Daniel Stretcu ; cuv. înainte de conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie. -
Ed. a 2-a, rev. - Pitești : Paralela 45, 2017
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-2486-4

I. Tudosie, Alexandru Nicolae (pref.)

51

© Copyright Editura Paralela 45, 2017

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

prof. dr. DANIEL STRETCU

Probleme de colorare

pentru pregătirea
concursurilor de matematică

Cuvânt-înainte de conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie
Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Colorarea suprafețelor, deși la început a fost doar o chestiune aparent simplă, de estetică, de talent artistic, a devenit, în decursul anilor, o problemă complexă, cu multiple ramificații și implicații în alte domenii, pentru a cărei soluționare a fost nevoie să se dezvolte un întreg aparat matematic, dublat, în zilele noastre, de utilizarea instrumentelor de calcul, devenind, în acest mod, obiect de studiu al matematicii și al informaticii.

Cu satisfacție am constatat că specialiștii români (matematicieni, informaticieni, ingineri) s-au înscris, la rândul lor, printre cei care au contribuit și contribuie, pe diverse paliere ale științei și cercetării, la dezvoltarea acestui domeniu, iar lucrarea de față constituie o nouă dovadă în acest sens.

Concepută ca o culegere de probleme ierarhizate pe grade de dificultate, de la simplu la complex, cartea domnului prof. dr. Daniel Stretcu și-a propus și a reușit să exploreze progresiv și sistematic un segment atipic și mai puțin familiar al matematicii, venind în întâmpinarea cererii multor rezolvitori de probleme, a pasionaților de matematică sau chiar a specialiștilor în domeniu.

Lucrarea este rodul muncii pasionate, ca profesor de matematică, a autorului și este bazată pe experiența sa de aproape trei decenii; munca de zi cu zi cu generațiile de elevi (la clasă sau la cercurile de matematică) i-a fost imbold și sursă de inspirație, iar motivația i-a fost sporită de succesele acestora la concursurile locale, naționale și internaționale, ca și de reușitele lor în carieră.

conf. dr. ing. Alexandru Nicolae TUDOSIE
Universitatea din Craiova

INTRODUCERE

Pavarea, pardosirea, parchetarea, mozaicarea au fost operații cunoscute și aplicate de vechii egipteni, babilonieni, de popoarele din Orient și de grecii antici. Efectul acestor operații crește atunci când materialul folosit nu are o singură culoare, ci este colorat diferit. Fascinația pentru combinarea culorilor a fost transpusă în matematică încă din Antichitate, astfel apărând o serie de probleme de acoperire (pavare), precursore ale celor ce astăzi sunt numite **probleme de colorare**.

Sunt demne de amintit în evoluția apariției și rezolvării acestor probleme acoperirea unei suprafețe plane cu poligoane regulate de același tip, rezolvată de Pitagora; acoperirea planului cu poligoane convexe de tipuri diferite, rezolvată de Kepler și, nu în ultimul rând, celebra *Teoremă a celor patru culori* formulată de studentul Francis Guthrie (cunoscută începând cu anul 1852): „*Se poate colora o hartă oarecare cu patru culori astfel încât oricare două țări, care au frontieră comună și care nu se reduc la un punct, să aibă culori diferite?*” ce a fost confirmată abia în 1976 de W. Haken și K. Appel, cu ajutorul calculatorului electronic.

Evident, astăzi prin probleme de colorare nu înțelegem doar probleme de acoperire, problematica dezvoltându-se și spre zone mai abstracte, iar soluțiile acestora se obțin cu ajutorul matematicii și al informaticii.

Ideea scrierii acestei cărți a venit de la dificultățile întâmpinate de un număr mare de elevi la concursurile școlare în rezolvarea problemelor de colorare, dificultăți cauzate și de inexistența unor lucrări care să descrie complet această temă.

Problemele de colorare se caracterizează prin natura lor atipică, ce impune din partea rezolvitorilor ingeniozitate, perseverență în căutarea soluțiilor, dar și o anumită experiență în acest domeniu.

Cartea se adresează tuturor categoriilor de elevi, de la începători până la cei care vor să obțină performanțe la concursurile și olimpiadele de matematică și de informatică. Astfel se explică faptul că vom întâlni în această lucrare atât probleme ușoare (unele fiind *clasice*), cât și numeroase probleme cu grad înalt de dificultate. Volumul acesta se adresează în principal elevilor de gimnaziu și celor din clasele a noua și a zecea, interesați să participe la concursuri matematice și la olimpiade școlare, până la cel mai înalt nivel, cum sunt olimpiadele internaționale și balcaniadele. Pe de altă parte, considerăm că această culegere este utilă și profesorilor de matematică și de informatică în susținerea unor cursuri opționale și pregătirea elevilor pentru participarea la diverse competiții.

Cititorul interesat va găsi în paginile acestei cărți o abordare metodică și sistematică a problematicii enunțate, lucrarea fiind structurată în șapte capitole.

Primul capitol cuprinde probleme de colorare mai ușoare, întâlnite la diferite concursuri, menite să trezească interesul elevilor pentru studiul acestui tip de probleme.

Capitolul al doilea conține probleme de colorare a tablelor, inclusiv table de șah, de la cele mai mici dimensiuni până la cele mai mari. Acestea constituie tipul de probleme cel mai frecvent întâlnit în concursurile școlare.

În capitolul al treilea sunt prezentate problemele de colorare a cercului, iar apoi probleme în care apar diverse poligoane într-o ordine crescătoare a numărului de laturi.

Colorarea planului și spațiului euclidian este studiată în diferite cazuri particulare în capitolul al patrulea.

Capitolul al cincilea se referă la problemele de colorare în care apar cubul și diferite paralelipipede sau prisme.

Capitolul al șaselea este un capitol cu totul special, dedicat introducerii în studiul problemelor de colorare a grafurilor. Desigur, tema acestui capitol depășește programa școlară și, din acest motiv, la sfârșitul cărții am introdus un appendix necesar pentru familiarizarea cu noțiunile folosite aici.

La final, capitolul al șaptelea prezintă probleme și jocuri diverse care nu se încadrează în vreuna din temele precedente.

Modul recomandat de parcurgere a cărții de față trebuie să fie unul interactiv, elevul nefiind invitat ca imediat după citirea problemei să se uite la soluțiile acesteia. El trebuie să încerce singur o metodă de rezolvare și, dacă această metodă nu este găsită, poate să treacă la partea de soluții.

Mulțumesc tuturor celor care, prin considerațiile lor, au contribuit la creșterea calității acestei cărți (ediția a doua) și aștept în continuare observații la adresa de e-mail: stretcud@yahoo.com sau pe datele de contact ale editurii.

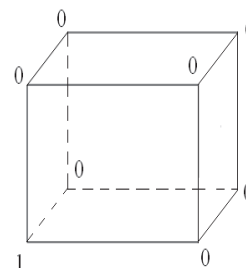
prof. dr. DANIEL STRETCU

Capitolul 5

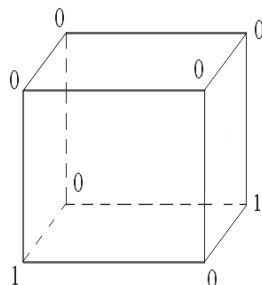


PROBLEME DE COLORARE A CUBURILOR, A PARALELIPIPEDELOR ȘI A PRISMELOR

- 5.1** Colorăm cu roșu vârfurile unui cub și cu albastru centrele fețelor sale. Există un drum care să treacă prin toate punctele colorate o singură dată, mergând doar de-a lungul diagonalelor fețelor?
- 5.2** Putem împacheta 249 de cărămizi de dimensiuni $1 \times 1 \times 4$ într-o cutie $10 \times 10 \times 10$, fețele cărămizilor fiind paralele cu fețele cutiei?
- 5.3** Colorăm fiecare față a unui cub cu câte o altă culoare. Câte colorări distincte există?
- 5.4** Un cub de latură n , cu $n \in \mathbb{N}^*$, se vopsește și apoi se împarte în cubulețe de latură 1. Câte dintre cubulețe vor avea:
i) nicio față vopsită? ii) o față vopsită? iii) două fețe vopsite? iv) trei fețe vopsite?
- 5.5** Un cub se vopsește cu trei culori: roșu, galben și albastru, astfel încât fețele opuse să aibă aceeași culoare. În câte moduri putem efectua vopsirea cubului? Generalizați, înlocuind cubul cu o prismă patrulateră regulată și, respectiv, un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile distincte două câte două.
- 5.6** Pentru ce valori naturale a, b, c putem obține o cutie $a \times b \times c$, compusă din cuburi unitate, fiecare față a cubului unitate având câte o culoare (deci se folosesc 6 culori), astfel încât fiecare față a cutiei să aibă o culoare și culorile unitate să fie lipite numai cu fețele având aceeași culoare?
- 5.7** În fiecare vârf al unui cub este înscris un număr, ca în figura alăturată. La fiecare pas se adaugă o unitate la două numere înscrise pe aceeași muchie a cubului. Arătați că nu se poate să obținem ca toate cele opt numere să fie egale.

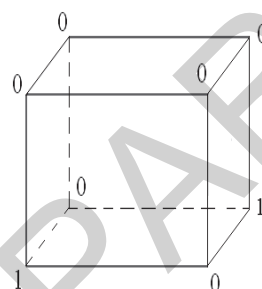


5.8 În vârfurile unui cub așezăm 0 și 1, ca în figura următoare:



Apoi, la fiecare pas, se adaugă câte o unitate la cele două numere scrise pe o aceeași muchie. Studiați dacă, după un număr de pași, cele opt numere scrise în vârfuri pot deveni egale.

5.9 În vârfurile unui cub așezăm 0 și 1, ca în figura următoare:



La fiecare pas se adaugă o unitate la două numere înscrise pe aceeași muchie a cubului. Arătați că nu se poate să obținem ca toate cele opt numere din vârfurile cubului să fie egale.

Daniel Stretcu

5.10 Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, având toate muchiile, precum și diagonalele fețelor laterale colorate cu roșu sau albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roșie, cât și o latură albastră. Arătați că toate cele 6 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeași culoare.

Concursul „Florica T. Câmpan”, 2011

5.11 O furnică se mișcă pe suprafața unui cub de latură 1, mergând de la un vârf la altul pe câte o muchie sau pe o diagonală a feței. Găsiți lungimea celui mai lung drum de la un vârf la cel opus dacă drumul nu se autointersectează și prin fiecare vârf furnica trece cel mult o dată.

Adrian Nemeș

CUPRINS

	Enunțuri	Soluții și rezolvări
<i>Cuvânt-înainte</i>	5	
<i>Introducere</i>	6	
CAPITOLUL 1		
Probleme de „încălzire”	8	49
CAPITOLUL 2		
Probleme de colorare a tablelor	14	55
CAPITOLUL 3		
Probleme de colorare a punctelor cercului și poligoanelor	26	88
CAPITOLUL 4		
Probleme de colorare a planului și a spațiului	30	101
CAPITOLUL 5		
Probleme de colorare a cuburilor, a paralelipipedelor și a prismelor	37	118
CAPITOLUL 6		
Grafuri	40	122
CAPITOLUL 7		
Diverse și jocuri.....	42	132
<i>Apendix grafuri</i>	142	
<i>Bibliografie</i>	146	