

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

.....



EDITURA PARALELA 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZANOSCHI, ADRIAN

Matematică : Algebră, geometrie : clasa a VII-a / Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. - Pitești : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3286-9

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2020

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră

geometrie

clasa a VII-a

mate 2000 – standard



Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasa a VII-a și de clasa a VIII-a, a apărut din necesitatea sistematizării și a interpretării creative și aplicative a noțiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii școlare cu setul de competențe impus de programă și cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmărește trecerea de la formarea noțiunilor și a deprinderilor elementare de operare cu acestea, la dezvoltarea raționamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele și noțiunile abstracte firești domeniului astfel încât elevul să vadă și să exerseze aplicațiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situația de a adapta aparatul teoretic la necesitățile și la provocările vieții de zi cu zi. Învățarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută și necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele inițiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naționale. Capitolele sunt împărțite în lecții care pot fi parcurse în 1-3 ore și se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecțiile încep cu o expunere detaliată și temeinică a părții teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării față de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecției, însoțite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât și din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanțat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Națională, iar cele care depășesc acest nivel – puține la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluții. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Națională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învățării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noștri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

CAPITOLUL I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT



Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2 , cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x , adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\quad}$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

$$1. \quad 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pătrat}} \\ \xleftarrow{\text{rădăcină pătrată}} \end{array} 9$$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi (\mathbb{Z}) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind -3 și 3 . Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & \\ = & \end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl așezăm sub 1 (stânga) și efectuăm scăderea.

III.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & 2 \\ = 8.2 & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) și despărțim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 13 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\ \underline{69} & \\ 13 & \end{array}$$

Împărțim pe 8 la 2, obținem câtul 4. Așezăm pe 4 la dreapta lui 2 și înmulțim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operația anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) și facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 135 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\ \underline{69} & 265 \cdot 5 = 1325 \\ 13.25 & \\ \underline{1325} & \\ = = = = & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă și despărțim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Treccem pe 5 în dreapta lui 26 și înmulțim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferența din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ și $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18,$$

$$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72,$$

$$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500.$$

2. Determinați numărul natural n , știind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x , știind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y , pentru care $\sqrt{4ab} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\sqrt{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ și $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ și $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ și $y = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 și 160.

2. Ridicați la pătrat următoarele numere și scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5 , $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 și 500.

4. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900;

b) 5^4 , 2^6 , 12^{10} , 6^{2n} , 13^{4n+6} ($n \in \mathbb{N}$).

5. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$;

b) $3^2 + 4^2 + 12^2$;

c) $3^7 + 3^6$;

d) $2^{11} - 2^{10}$;

e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$;

f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuați următoarele calcule și scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 49$;

c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$;

d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătați că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculați (utilizând descompunerea în factori primi):

- $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;
- $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2 \cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4 \cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$;
- $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n} \cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$);
- $\sqrt{12 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18 \cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31} + 2 \cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22} - 2 \cdot 3^{21} + 3^{20}}$.

11. Calculați (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

- $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;
- $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;
- $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculați:

- $\sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{81}$;
- $\sqrt{100} - (\sqrt{169} - \sqrt{25})$;
- $\sqrt{9} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;
- $(\sqrt{256} - \sqrt{144}) : \sqrt{4}$;
- $(\sqrt{0} + \sqrt{1})^7 + \sqrt{361}$;
- $(2 + \sqrt{324}) \cdot \sqrt{16}$;
- $(\sqrt{289} + \sqrt{169}) : \sqrt{225}$;
- $2 \cdot \sqrt{121} - \sqrt{441}$.

13. Calculați:

- $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;
- $\sqrt{20-32:(7-5)}$;
- $\sqrt{104:2+4 \cdot 3}$;
- $\sqrt{(14-6) \cdot (7+11)}$;
- $\sqrt{2^8 + 2^{11}}$;
- $\sqrt{15^2 + 20^2}$;
- $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$;
- $\sqrt{3(7^{12} - 7^{10})}$.

14. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

- $\sqrt{x} = 15$;
- $\sqrt{x-2} = 16$;
- $7 + \sqrt{x} = 12$;
- $\sqrt{x+3} - 4 = 6$.

15. Calculați \sqrt{abc} , știind că $\sqrt{1ba} = \bar{c}3$.

16. Determinați numărul natural \overline{abcd} , știind că $\sqrt{\overline{abc5}} = \bar{3}d$.

17. Aflați lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m^2 .

18. Aflați perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea $L = 175 \text{ cm}$ și lățimea $l = 28 \text{ cm}$ (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile $L = 12 \text{ m}$ și $l = 8 \text{ m}$. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de $x \text{ cm}$. Aflați valoarea lui x .

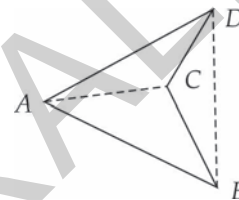
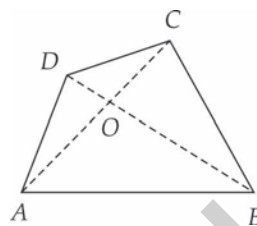
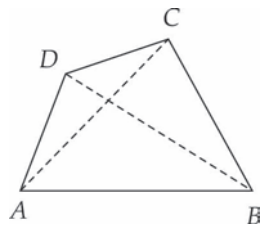
CAPITOLUL IV
PATRULATERUL



IV.1. PATRULATERUL CONVEX

Elemente:

- laturi: segmentele $AB, BC, CD; DA$;
- diagonale: segmentele AC, BD ;
- unghiuri: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$.



Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.

Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360° .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care $AB = AD = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ADB = 60^\circ$ și $\sphericalangle CBD = 90^\circ$ (fig. 1).

- Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$.
- Aflați perimetrul patrulaterului.
- Desenați patrulaterul $ABCD$.

Soluție: a) Triunghiul ABD este isoscel și are un unghi de 60° , deci este echilateral; rezultă că $BD = 3$ cm, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle ABD = 60^\circ$. Astfel, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 150^\circ$.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD , obținem $CD = 5$ cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15$ cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral ABD cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic BCD , $\sphericalangle B = 90^\circ$, cu $BC = 4$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat.

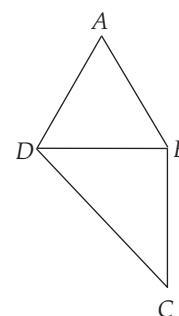


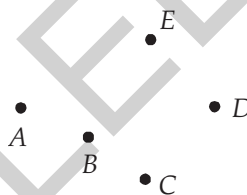
Fig. 1

2. Notăm cu M mulțimea unghiurilor ascuțite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulțimea M ?

Soluție: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuțite (cele cu unghiurile $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$), cu 1 unghi ascuțit (de exemplu cele cu unghiurile $60^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 100^\circ$), cu 2 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$) și cu 3 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile $80^\circ, 80^\circ, 80^\circ, 120^\circ$). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuțite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, fapt imposibil. În concluzie, mulțimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E , ca în figura alăturată. Desenați și notați două patrulatere convexe și două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte.



2. a) Desenați un patrulater convex $ABCD$.

b) Numiți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.

c) Numiți diagonalele patrulaterului.

d) Numiți perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuț parcurge traseul $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ din figura 2. El face 500 de pași. Care este lungimea pasului lui Ionuț?

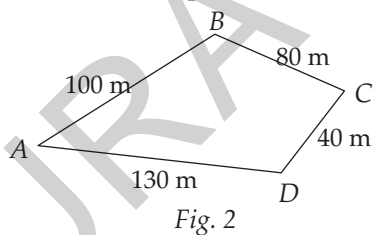


Fig. 2

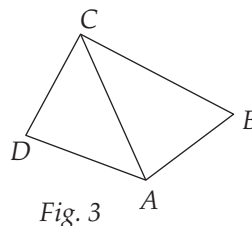


Fig. 3

7. Construiți un patrulater convex $ABCD$, știind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm și $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculați perimetrul patrulaterului.

8. Construiți un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte și:

a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$;

b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$.

9. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:

a) $\sphericalangle A = 40^\circ, \sphericalangle B = 70^\circ, \sphericalangle C = 150^\circ, \sphericalangle D = ?^\circ$; b) $\sphericalangle A = 100^\circ, \sphericalangle B = ?^\circ, \sphericalangle C = 120^\circ, \sphericalangle D = 20^\circ$.

10. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât triunghiul ACD este echilateral, iar triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC . Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

11. În patrulaterul convex $ABCD$, măsura unghiului A este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle A$.

12. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$ sunt direct proporționale cu numerele 2, 4, 6 și 8. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

13. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$ sunt invers proporționale cu numerele 2, 3, 4 și 6. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

14. Folosind metoda prin care ați demonstrat că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360° , calculați suma măsurilor unghiurilor unui:

a) pentagon;

b) hexagon.

15. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle DBC = 90^\circ$, $AB = 7,2$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 13$ cm. Aflați perimetrul patrulaterului.

16. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul O . Determinați perimetrul patrulaterului, știind că $OA = 5$ cm, $OB = OD = 12$ cm și $OC = 16$ cm.

17. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = AD$ și $BC = CD$. Demonstrați că dreptele AC și BD sunt perpendiculare.

18. Fie $ABCD$ un patrulater și M mijlocul diagonalei AC . Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$, știind că $AM = BM = DM$.

19. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare și se intersectează în O , iar punctul O este mijlocul segmentului BD (fig. 4).

a) Demonstrați că triunghiurile ABC și ADC sunt congruente.

b) Știind că $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ și $AB = 6$ cm, determinați lungimea segmentului OC .

20. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$, $\sphericalangle A = 105^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $\sphericalangle D = 45^\circ$ (fig. 5).

a) Arătați că $AC = CD$.

b) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle DBC$.

21. Fie $ABCD$ un patrulater convex, care are unghiurile opuse $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$ de măsuri egale. Demonstrați că bisectoarele AP și CQ ale unghiurilor $\sphericalangle A$, respectiv $\sphericalangle C$ sunt drepte paralele (fig. 6).

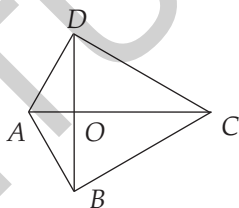


Fig. 4

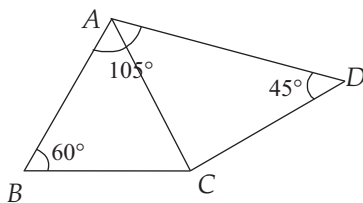


Fig. 5

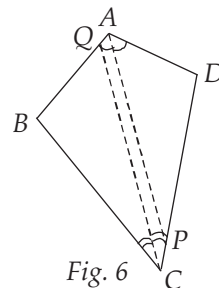


Fig. 6

IV.2. PARALELOGRAMUL



Un patrulater care are laturile opuse paralele se numește **paralelogram**.

Proprietăți:

P₁: Laturile opuse ale unui paralelogram sunt segmente egale.

R_{1P₁}: Dacă un patrulater are laturile opuse egale două câte două, el este un paralelogram.

R_{2P₁}: Dacă un patrulater are o pereche de laturi opuse paralele și egale, el este un paralelogram.

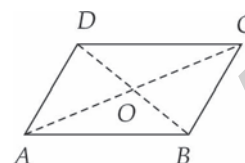
P₂: Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt egale, iar unghiurile alăturate sunt suplementare.

R_{1P₂}: Dacă un patrulater are două perechi consecutive de unghiuri alăturate suplementare, el este un paralelogram.

R_{2P₂}: Dacă un patrulater are unghiurile opuse egale două câte două, el este un paralelogram.

P₃: Diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc.

RP₃: Dacă diagonalele unui patrulater se înjumătățesc, el este un paralelogram.



PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 2BC$, iar M mijlocul laturii CD (fig. 1).

a) Arătați că triunghiurile DAM și CBM sunt isoscele.

b) Demonstrați că AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

c) Arătați că unghiul $\sphericalangle AMB$ este drept.

Soluție: a) Conform P_1 , avem $AB = CD$ și $AD = BC$; rezultă că $DA = DM$ și $CB = CM$.

b) Dreptele AB și CD sunt paralele; considerând secanta AM , obținem că $\sphericalangle DMA = \sphericalangle MAB$ (alt. int.). Pe de altă parte, din a) obținem $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DAM$. Deducem că $\sphericalangle MAB = \sphericalangle DAM$, adică AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

c) Ca la b), se arată că BM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$. Atunci $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \frac{1}{2} \sphericalangle B = \frac{1}{2} (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ (am ținut seama de P_2). Suma unghiurilor triunghiului MAB fiind 180° , rezultă că $\sphericalangle AMB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

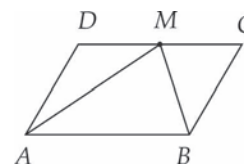


Fig. 1

Cuprins

CUVÂNT-ÎNAINTE	5
----------------------	---

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

ALGEBRĂ.....	7
GEOMETRIE	11
TESTE INIȚIALE	15

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect.....	19
I.2. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional	23
I.3. Numere iraționale, exemple, estimări. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	26
I.4. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axă prin aproximări	31
I.5. Modulul unui număr real	33
I.6. Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea și introducerea factorilor sub radical	36
I.7. Adunarea și scăderea numerelor reale	39
I.8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	42
I.9. Puterea cu exponent întreg a unui număr real	46
I.10. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale	48
I.11. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$	55
I.12. Media geometrică a două numere reale pozitive	57
I.13. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	59
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	61

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități.....	63
II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente	65
II.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	68
II.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare	72
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	75

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. Date statistice – recapitulare și completări. Poligonul frecvențelor	77
III.2. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale	84
III.3. Distanța între două puncte din plan.....	88
III.4. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale	92
III.5. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	96
Recapitulare și sistematizare prin teste	101

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex.....	104
IV.2. Paralelogramul	107
IV.3. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi	111
IV.4. Dreptunghiul	114
IV.5. Rombul	117
IV.6. Pătratul	120
IV.7. Trapezul. Linia mijlocie în trapez	123
IV.8. Trapezul isoscel	127
IV.9. Arii	129
Recapitulare și sistematizare prin teste	137

CAPITOLUL V. CERCUL

V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a	139
V.2. Coarde și arce în cerc. Proprietăți	142
V.3. Unghi înscris în cerc.....	146
V.4. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	149
V.5. Poligoane regulate înscrise într-un cerc. Definiție, desen.....	153
V.6. Lungimea cercului și aria discului	155
Recapitulare și sistematizare prin teste	160

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA

VI.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	162
VI.2. Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date.....	167
VI.3. Reciproca teoremei lui Thales	173
VI.4. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	177
VI.5. Criterii de asemănare a triunghiurilor	180

VI.6. Aplicații. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea	185
Recapitulare și sistematizare prin teste	191
CAPITOLUL VII. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC	
VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	193
VII.2. Teorema înălțimii.....	194
VII.3. Teorema catetei	196
VII.4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora.....	199
VII.5. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit.....	202
VII.6. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	205
VII.7. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat.....	209
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	212
PROBLEME RECAPITULATIVE	
ALGEBRĂ	214
GEOMETRIE.....	219
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	225