MATE 2000+
Teme

Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală: ....

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : teme recapitulative : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Piteşti : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3316-3

I. Negrilă, Maria

51

Anton Negrilă

Maria Negrilă

MATEMATICĂ

TEME RECAPITULATIVE

CLASA A VII-A

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

1

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional
I.2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ
I.3. Mulțimea numerelor reale
I.4. Reguli de calcul cu radicali. Produsul radicalilor. Câtul radicalilor
I.5. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical
I.6. Operații cu numere reale
I.7. Raționalizarea numitorului unei fracții
I.8. Formule de calcul prescurtat
I.9. Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$

2

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută
II.2. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute
II.3. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații liniare

3

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide.
Sisteme de axe ortogonale în plan.
Reprezentarea punctelor în sistem de axe ortogonale.
Distanța dintre două puncte din plan

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR NATURAL. ESTIMAREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

1. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:
a) 25, 9, 35, 46, 144, 180, 289, 324, 340, 361;
b) 15^2, $(-7)^4$, 3^{10}, $(-10)^5$, $(-14)^{12}$, $(-7)^9$, $(-24)^7$, $(-32)^6$;
c) 7^{6n}, 5^{4n+2}, 18^{n^2+1}, 17^{n^2+n}, 14^{n^2-n+4}, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $\sqrt{81} = 9$; **b)** $\sqrt{7^2} = 7$; **c)** $\sqrt{(-6)^2} = -6$; **d)** $\sqrt{(-108)^2} = -108$;
e) $\sqrt{64a^2} = 8a$, $a < 0$; **f)** $\sqrt{(-36a^2)^2} = 36a^2$; **g)** $\sqrt{25a^4b^2} = 5a^2b$, $b < 0$.

3. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $x^2 = 49$; **b)** $x^2 = 121$; **c)** $4x^2 = 1600$; **d)** $5x^2 = 320$;
e) $-3x^2 = -48$; **f)** $x^2 + 16 = 241$; **g)** $2x^2 - 25 = 263$; **h)** $3x^2 - 256 = 716$.

4. Folosind formula $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, unde $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculaţi:
a) $\sqrt{x+1}$, unde $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2019}$;
b) $\sqrt{2x+1}$, unde $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2017}$;
c) $\sqrt{4x+1}$, unde $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2015}$;
d) $\sqrt{8x+1}$, unde $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2014}$;
e) $\sqrt{35x+1}$, unde $x = 1 + 6^2 + 6^4 + 6^6 + \ldots + 6^{2010}$.

5. Calculaţi numărul natural x şi arătaţi că este pătratul unui număr natural, apoi calculaţi $\sqrt{x}$:
a) $x - 4 = 3(4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2016})$;
b) $x - 9 = 8(9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{2018})$;
c) $x - 16 = 15(16 + 16^2 + 16^3 + \ldots + 16^{2020})$.

6. Arătaţi că numărul x este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $x = 3^{2n+5} \cdot 4^{2n+5} - 2^{2n+3} \cdot 6^{2n+5}$.

7. Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:
a) $x = 5n + 2$; **b)** $x = 15n + 7$; **c)** $x = 25n - 8$; **d)** $x = 10n + 3$;
e) $x = 6^n + 7$; **f)** $x = 10^n + 8$; **g)** $x = 21^n + 36$; **h)** $x = 15^n + 28$.

8. Arătaţi că numerele de mai jos nu sunt pătrate perfecte:
a) $x = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + \ldots + 8^{2013}$; **b)** $x = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{2009}$.

9. Fie numărul natural $a = 8^{2n} \cdot 225^{n+1} + 15^{2n} \cdot 64^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că numărul $\sqrt{a}$ este număr natural par, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Se consideră numărul $a = 9^{3n+3} \cdot 60^{2n} + 9^{2n+1} \cdot 12^{2n+2} \cdot 15^{2n} + 9^{3n+1} \cdot 12^{2n} \cdot 5^{2n+2} \cdot 16$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că numărul $\sqrt{a}$ este număr natural par, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Efectuaţi:

a) $\sqrt{15^2}$, $\sqrt{21^4}$, $\sqrt{(-29)^2}$, $\sqrt{(-5)^6}$, $\sqrt{(-11)^4}$, $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^4}$, $\sqrt{a^6}$, $a \in \mathbb{Z}$;

b) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$, $\sqrt{12^2 \cdot 7^2}$, $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$, $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$, $\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$;

c) $\sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^4}$, $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}$, $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-7)^2}$;

d) $\sqrt{(-17)^2}$, $\sqrt{(-21)^4}$, $\sqrt{(-27)^6}$, $\sqrt{(-31)^8}$, $\sqrt{(-15)^6}$, $\sqrt{(-28)^4}$.

12. Calculaţi rădăcina pătrată, folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate:

a) $\sqrt{4096}$; $\sqrt{2304}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{1764}$; $\sqrt{5184}$; $\sqrt{7056}$;

b) $\sqrt{15376}$; $\sqrt{18496}$; $\sqrt{29584}$; $\sqrt{132496}$; $\sqrt{104976}$.

13. Calculaţi:

a) $\sqrt{55696} - \sqrt{54756} + \sqrt{9216}$;

b) $\sqrt{186624} - \sqrt{419904} + \sqrt{148996}$.

14. Calculaţi:

a) $\sqrt{5^2 + 12^2}$;

b) $\sqrt{8^2 + 15^2}$;

c) $\sqrt{7^2 + 24^2}$;

d) $\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}$;

e) $\sqrt{20^2 - 16^2 + 9^2}$;

f) $\sqrt{45^2 - 27^2 + 48^2}$;

g) $\sqrt{3^2 \cdot 30^2 - 3^2 \cdot 18^2 + 3^2 \cdot 32^2}$.

15. Determinaţi-l pe $x \in \mathbb{N}$, ştiind că:

a) $\sqrt{2^{3960} - 2^{3959} - 2^{3958} - \ldots - 2^{2004}} = 2^{6x}$;

b) $\sqrt{3^{2020} - 2 \cdot 3^{2019} - 2 \cdot 3^{2018} - 2 \cdot 3^{2017} - \ldots - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2} = 3^x$.

16. Demonstraţi că numărul $A = 80 \cdot 5^{2n} \cdot 4^{3n} + 20 \cdot 10^{2n} \cdot 2^{4n}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

17. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

$$\sqrt{1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \ldots + 3 \cdot 4^{2020} + 3 \cdot 4^{2021}} = 2^{6x}.$$

18. Calculaţi valoarea numărului:

$$x = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{53 \cdot 54}\right) - \left(\frac{1}{54 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 56} + \ldots + \frac{1}{107 \cdot 108}\right)\right] \cdot \frac{180}{7}}.$$

19. Se consideră numărul $a = 9^{2n+1} \cdot 144^n \cdot 16 + 81 \cdot 12^{2n} \cdot 9^{2n} + 25 \cdot 4^{2n+2} \cdot 9^{3n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $\sqrt{a}$ este număr natural par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Determinaţi valoarea numărului natural a pentru care $a = \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2021 + 2023}$.

I.2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL NENEGATIV

1. Se consideră mulţimea:

$$A=\left\{-\frac{3}{5},\ \sqrt{49},\ -\frac{28}{4},\ 5{,}2,\ \frac{1}{4},\ -2\sqrt{4},\ -3\sqrt{9},\ \sqrt{81},\ -\sqrt{1},\ \frac{3}{8},\ 0{,}15\right\}.$$

Scrieţi elementele mulţimilor: $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{Q}$; $A\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$; $A\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})$.

2. Calculaţi:

a) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; **b)** $\sqrt{\frac{49}{64}}$; **c)** $\sqrt{\frac{9}{169}}$; **d)** $\sqrt{\frac{144}{289}}$;

e) $\sqrt{\frac{121}{256}}$; **f)** $\sqrt{\frac{324}{625}}$; **g)** $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; **h)** $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

i) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$; **j)** $\sqrt{2\frac{41}{64}}$; **k)** $\sqrt{14\frac{1}{16}}$; **l)** $\sqrt{12\frac{24}{25}}$.

3. Calculaţi:

a) $\sqrt{0{,}64}$; **b)** $\sqrt{1{,}69}$; **c)** $\sqrt{5{,}76}$;

d) $\sqrt{0{,}2304}$; **e)** $\sqrt{0{,}2916}$; **f)** $\sqrt{4{,}6656}$;

g) $\sqrt{10{,}4976}$; **h)** $\sqrt{1{,}1664}$; **i)** $\sqrt{6{,}4516}$.

4. Calculaţi:

a) $1\frac{2}{3}\cdot\sqrt{0{,}09}-2\frac{5}{8}\cdot\sqrt{0{,}(4)}+0{,}(6)\cdot\sqrt{0{,}5625}$;

b) $1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{64}{729}}-\frac{4}{5}\cdot\sqrt{3{,}0625}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt{0{,}64}$.

5. Calculaţi:

a) $\sqrt{\frac{1+3+5+7+...+2021}{1+3+5+7+...+1013}}$; **b)** $\sqrt{\frac{1+3+5+7+...+75}{1+3+5+7+...+37}}$;

c) $\sqrt{\frac{2}{5}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{63\cdot64}\right)-\left(\frac{1}{64\cdot65}+\frac{1}{65\cdot66}+...+\frac{1}{127\cdot128}\right)\right]}$;

d) $\sqrt{2\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{74\cdot75}\right)-\left(\frac{1}{75\cdot76}+\frac{1}{76\cdot77}+...+\frac{1}{149\cdot150}\right)\right]}$.

6. Calculaţi numărul:

$$N=\sqrt{(x+y-6)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}-\sqrt{(x-y-5)^2}-\sqrt{(x-y+6)^2},$$

unde x şi y sunt numere raţionale astfel încât $-2\le x\le 2$ şi $-3\le y\le 3$.

GEOMETRIE

1

PATRULATERUL
I.1. Patrulatere convexe
I.2. Paralelogramul
I.3. Linia mijlocie în triunghi
I.4. Dreptunghiul
I.5. Rombul
I.6. Pătratul
I.7. Trapezul
I.8. Aria triunghiului
I.9. Aria patrulaterului

2

CERCUL

3

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR
III.1. Teorema lui Thales
III.2. Teorema fundamentală a asemănării

4

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

I.1. PATRULATERE CONVEXE

1. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $5\sphericalangle C = 4\sphericalangle D$, $6\sphericalangle D = 5\sphericalangle B$, $4\sphericalangle A = 9\sphericalangle C$. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

2. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt proporționale cu numerele 2, 3, 6 și, respectiv, 7.

3. Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui patrulater convex este 160°. Știind că patrulaterul are trei unghiuri congruente, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.

4. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că suma măsurilor unghiurilor A și C este egală cu 205°, suma măsurilor unghiurilor B, D și C este egală cu 250° și diferența măsurilor unghiurilor B și D este egală cu 15°.

5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6 și, respectiv, 9.

6. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ ale cărui unghiuri verifică egalitățile:

$$\sphericalangle D = \frac{2}{3}\sphericalangle C;\ \sphericalangle A = \frac{1}{6}\sphericalangle C;\ \sphericalangle B = \frac{5}{4}\sphericalangle D.$$

7. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,(1), 0,125, 0,(3) și, respectiv, 0,25.

8. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că măsurile unghiurilor B, C și, respectiv, D sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 8, iar măsurile unghiurilor D și A sunt invers proporționale cu numerele 0,125 și 0,(1).

9. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, știind că:

$$\sphericalangle B = 1{,}25\sphericalangle D;\ \sphericalangle D = 0{,}(6)\sphericalangle C;\ \sphericalangle A = 0{,}1(6)\sphericalangle C.$$

I.2. PARALELOGRAMUL

1. În paralelogramul $ABCD$ se duc $AE \perp BD$ și $CF \perp BD$, unde $E, F \in (BD)$. Demonstrați că $AECF$ este paralelogram.

2. În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctele $M \in (CD)$, $N \in (BC)$, $P \in (AB)$ și $Q \in (AD)$, astfel încât $[PB] \equiv [MD]$ și $[BN] \equiv [DQ]$. Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

3. În paralelogramul $ABCD$, unde $AC \cap BD = \{O\}$, se consideră punctele E, F, G și, respectiv, H mijloacele segmentelor AO, BO, CO și, respectiv, DO. Arătați că $EFGH$ este paralelogram.

4. În paralelogramul $ABCD$, unde $AC \cap BD = \{O\}$, se consideră punctele $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$, astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Demonstrați că:

a) $ANCM$ este paralelogram;

b) punctul O este mijlocul segmentului MN.

5. În paralelogramul $ABCD$ se consideră semidreapta $[BM$ bisectoarea unghiului ABC, $M \in (AC)$, și semidreapta $[DN$ bisectoarea unghiului ADC, $N \in (AC)$. Demonstrați că $BMDN$ este paralelogram.

I.3. LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI

1. În triunghiul ABC se consideră punctele M şi N pe latura $[AB]$, astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NB]$. Se notează cu P mijlocul laturii $[BC]$, iar punctul Q este simetricul punctului N faţă de punctul P. Dacă $AP \cap QM = \{G\}$ şi $NG \cap AQ = \{T\}$, arătaţi că $[AT] \equiv [TQ]$.

2. În triunghiul ABC se consideră punctele D şi E mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$, iar F un punct oarecare pe latura $[BC]$. Dacă punctul M este mijlocul segmentului AF, arătaţi că punctul M aparţine segmentului DE.

3. În paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctele M şi N sunt mijloacele laturilor $[AD]$ şi, respectiv, $[BC]$. Arătaţi că punctele M, O, N sunt coliniare.

4. În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi, respectiv, $[DA]$. Arătaţi că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

5. În triunghiul ABC se notează cu M mijlocul laturii $[AC]$, iar punctul N este mijlocul segmentului BM. Dacă $AN \cap BC = \{P\}$, arătaţi că $BC = 3BP$.

I.4. DREPTUNGHIUL

1. În patrulaterul ortodiagonal $MNPQ$ ($MP \perp NQ$) se notează cu E, F, G, H mijloacele laturilor $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ şi, respectiv, $[QM]$. Arătaţi că $[EG] \equiv [FH]$.

2. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se notează cu D mijlocul laturii $[BC]$. Dacă $DE \perp AB$ şi $DF \perp AC$, unde $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$, arătaţi că $BC = 2EF$.

3. Demonstraţi că într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din ipotenuză.

4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC şi punctul D situat pe ipotenuza $[BC]$. Dacă $DE \perp AB$ şi $DF \perp AC$, unde $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$, demonstraţi că $DE + DF =$ constant.

5. În dreptunghiul $ABCD$ se iau punctele M şi N pe diagonala $[AC]$, astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Dacă $DM \cap AB = \{T\}$ şi $BN \cap CD = \{P\}$, arătaţi că:

a) $BPDT$ este paralelogram;

b) mijlocul diagonalei $[AC]$ este şi mijlocul segmentului PT.

I.5. ROMBUL

1. În rombul $ABCD$, $\sphericalangle ABC = 120°$. Arătaţi că $[AB] \equiv [BD]$.

2. În rombul $ABCD$ se consideră punctele E şi F mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AD]$. Dacă $BF \cap AC = \{M\}$ şi $DE \cap AC = \{N\}$, iar $AC \cap BD = \{O\}$, arătaţi că:

a) $[OM] \equiv [ON]$;

b) punctele E, O, F sunt coliniare.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

I.1. Patrulatere convexe

1. $\sphericalangle A = 135°$; $\sphericalangle B = 90°$; $\sphericalangle C = 60°$; $\sphericalangle D = 75°$. **2.** 40°; 60°; 120°; 140°. **3.** 60°; 100°; 100°; 100°. **4.** $\sphericalangle A = 110°$; $\sphericalangle B = 85°$; $\sphericalangle C = 95°$; $\sphericalangle D = 70°$. **5.** 60°; 75°; 90°; 135°. **6.** $\sphericalangle A = 22°30'$; $\sphericalangle B = 112°30'$; $\sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D = 135°$. **7.** $\sphericalangle A = 135°$; $\sphericalangle B = 120°$; $\sphericalangle C = 45°$; $\sphericalangle D = 60°$. **8.** $\sphericalangle A = 135°$; $\sphericalangle B = 45°$; $\sphericalangle C = 60°$; $\sphericalangle D = 120°$. **9.** $\sphericalangle A = 22°30'$; $\sphericalangle B = 112°30'$; $\sphericalangle C = 135°$; $\sphericalangle D = 90°$.

I.2. Paralelogramul

1. Din $AE \perp BD$ şi $CF \perp BD \Rightarrow AE \parallel CF$. Din $\Delta AED \equiv \Delta CFB$ (I.U.) $\Rightarrow AE \equiv CF$. Aşadar, $AECF$ este paralelogram. **2.** Din $\Delta PAQ \equiv \Delta MCN$ (L.U.L.) $\Rightarrow PQ \equiv MN$. Din $\Delta QDM \equiv \Delta NBP$ (L.U.L.) $\Rightarrow MQ \equiv NP \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram. **3.** Se va arăta că EF şi HG sunt linii mijlocii în ΔAOB şi ΔCOD. Deci, $EF \parallel HG$ şi $EF = HG$, aşadar $EFGH$ este paralelogram. **4.** a) $AM \equiv CN$ (ip.) şi $AM \parallel CN$ (ip.) $\Rightarrow ANCM$ este paralelogram; b) În paralelogramul $AMCN$, AC şi MN sunt diagonale; cum $O \in AC$ astfel încât $OA \equiv OC$ (ip.), rezultă că $O \in MN$ şi $OM \equiv ON$. **5.** $\Delta ADN \equiv \Delta CBM$ (U.L.U.) $\Rightarrow DN \equiv BM$; $\Delta ANB \equiv \Delta CMD$ (L.U.L.) $\Rightarrow BN \equiv DM \Rightarrow BMDN$ este paralelogram.

I.3. Linia mijlocie în triunghi

1. În ΔANQ: AP – mediană şi QM – mediană, $AP \cap QM = \{G\} \Rightarrow G$ este centru de greutate $\Rightarrow NG$ – mediană; $NG \cap AQ = \{T\} \Rightarrow NT$ – mediană $\Rightarrow AT \equiv TQ$. **2.** În ΔABF: DM – linie mijlocie $\Rightarrow DM \parallel BF \Rightarrow DM \parallel BC$ (axioma paralelelor). În ΔACF: ME – linie mijlocie $\Rightarrow ME \parallel FC \Rightarrow ME \parallel BC \Rightarrow DM$ şi ME coincid, sunt confundate (identice) $\Rightarrow M \in DE$. **3.** În ΔABD: MO – linie mijlocie $\Rightarrow MO \parallel AB$ (axioma paralelelor). În ΔABC: NO – linie mijlocie $\Rightarrow NO \parallel AB \Rightarrow OM$ şi ON coincid, sunt confundate (identice) $\Rightarrow O \in MN$. **4.** În ΔABC: MN – linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \dfrac{AC}{2}$. În ΔADC: PQ – linie mijlocie $\Rightarrow PQ \parallel AC$, $PQ = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow MN \parallel PQ$ şi $MN = PQ \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram. **5.** Fie $MQ \parallel AP$, $Q \in BC$. În ΔBMQ: $BN = MN$ şi $NP \parallel MQ \Rightarrow NP$ – linie mijlocie $\Rightarrow BP = PQ$ (1). În ΔACP: $AM = CM$ şi $MQ \parallel AP \Rightarrow MQ$ – linie mijlocie $\Rightarrow PQ = QC$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $BP = PQ = QC \Rightarrow BC = 3BP$.

I.4. Dreptunghiul

1. În ΔMNQ: EH – linie mijlocie $\Rightarrow EH \parallel NQ$ şi $EH = \dfrac{NQ}{2}$ (1). În ΔPNQ: FG – linie mijlocie $\Rightarrow FG \parallel NQ$ şi $FG = \dfrac{NQ}{2}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $EH \parallel FG$ şi $EH = FG \Rightarrow EFGH$ este paralelogram (3). În ΔNPM: EF – linie mijlocie $\Rightarrow EF \parallel MP$; cum $EH \parallel NQ$ şi $MP \perp NQ \Rightarrow EH \perp EF$ (4). Din (3) şi (4) rezultă că $EFGH$ este dreptunghi $\Rightarrow EG \equiv FH$. **2.** $DE \perp AB \Rightarrow \sphericalangle AED = 90°$; $DF \perp AC \Rightarrow \sphericalangle AFD = 90°$; cum $\sphericalangle BAC = 90° \Rightarrow HEDF$ este dreptunghi $\Rightarrow EF = AD$; dar $AD = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow EF = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2EF$. **3.** Fie M mijlocul lui BC, iar D simetricul lui A faţă de M. Deci, $ABDC$ este paralelogram; cum $\sphericalangle BAC = 90°$, rezultă că $ABDC$ este dreptunghi $\Rightarrow BC = AD$; cum $AD = 2AM \Rightarrow BC = 2AM \Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$. **4.** $DE \perp AB \Rightarrow \Delta BED$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow BE = DE$; $DF \perp AC \Rightarrow \sphericalangle AED = \sphericalangle AFD = \sphericalangle EAF = 90° \Rightarrow AEDF$ este dreptunghi $\Rightarrow DF = AE$. Deci, $AB = AE + BE = DF + DE \Rightarrow DE + DF =$ constant.

NOTIȚELE ELEVULUI

CUPRINS