Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală:...

....

MATE 2000+

Inițiere

EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalităţi de lucru diferenţiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : 8 /
Ion Tudor. - Ed. a 4-a, rev.. - Piteşti : Paralela 45, 2020-
2 vol.
ISBN 978-973-47-3236-4
Partea 1. - 2020. - ISBN 978-973-47-3237-1

51

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalități de lucru diferențiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediția a IV-a, revizuită

ÎNVĂȚARE DE INIȚIERE ®
susținere, remediere

Editura Paralela 45

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli deziderátului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Pentru a accesa aplicaţia urmaţi indicaţiile din insertul auxiliarului pe care tocmai l-aţi achiziţionat.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Scanează codul QR pentru a accesa aplicaţia MATE 2000+

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale” am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$”.

Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \,\vdots\, x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt $\pm1, \pm5, \pm7, \pm35$, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și card $A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \,\vdots\, 3\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F. Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \,\vdots\, 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} =$ ....; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} =$ ....;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 3\} =$ ....; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 5\} =$ ....

2. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „geometria”$\}$ = ...;

b) $B = \{y \mid y$ este cifră a numărului „701233048”$\}$ = ...

3. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} =$ ....; b) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\} =$ ....

4. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{5} \text{ este fracţie subunitară} \right\} =$ ....;

b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{5}{n} \text{ este fracţie supraunitară} \right\} =$ ....

5. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „tetraedru”$\}$ şi $F = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „cilindru”$\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

6. Efectuaţi $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$ în următoarele cazuri:

a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;

b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \leq 3\}$.

b)

7. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ este mulţimea divizorilor naturali ai lui n, efectuaţi:

a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

8. Se consideră mulţimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \le m < 4\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

9. Arătaţi că $A = B$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \le 7\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 7 - m,\ m \in A\}$;

b) $A = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m < 6\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 6 - m,\ m \in A\}$.

10. Se consideră mulţimile $E = \{\overline{ab},\ a \ne 0 \mid \overline{ab} \ \vdots\ 15\}$ şi $F = \{\overline{cd},\ c \ne 0 \mid \overline{cd} \ \vdots\ 25\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

11. Se consideră mulţimile $A = \left\{x \mid \overline{173x8} < \overline{17xx8}\right\}$ şi $B = \left\{y \mid \overline{51yy3} < \overline{51y63}\right\}$. Arătaţi că $B \subset A$.

12. Scrieţi submulţimile următoarelor mulţimi:

a) $E = \left\{x \mid \overline{807x} \ \vdots\ 4\right\}$; b) $F = \left\{y \mid \overline{14y5} \ \vdots\ 3\right\}$.

13. Se consideră mulţimile $A = \{\overline{ab},\ a \ne 0,\ a \ne b \mid \overline{ab} = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ şi $B = \{\overline{cd},\ c \ne 0,\ c \ne d \mid \overline{cd} = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Determinaţi card $A \times B$.

14. Se consideră mulţimile $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n+4} < 8^3\}$ şi $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n+1} < 9^2\}$. Arătaţi că $C = D$.

15. Se consideră mulţimile $E = \{\overline{ab},\ a \ne 0 \mid (\overline{ab};\ 60) = 15\}$ şi $F = \{\overline{cd},\ c \ne 0 \mid (75;\ \overline{cd}) = 15\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

16. Se consideră mulţimile $A = \{\overline{xy},\ x \ne 0 \mid [\overline{xy};\ 48] = 144\}$ şi $B = \{\overline{zt},\ z \ne 0 \mid [60;\ \overline{zt}] = 180\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

17. Se consideră mulţimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 2^{n+3}\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 3^{n+1}\}$. Arătaţi că $A = B$.

18. Se consideră mulţimea $A = \left\{\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}},\ a \ne 0,\ b \ne 0 \;\middle|\; \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \dfrac{4}{7}\right\}$. Câte submulţimi are mulţimea A?

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

19. Se consideră mulţimile:

$$A=\left\{\overline{ab}, a\neq 0, b\neq 0 \,\middle|\, \overline{ab}=\frac{\overline{aa}+\overline{bb}}{2}\right\} \text{ şi } B=\left\{\overline{ab}, a\neq 0, b\neq 0 \,\middle|\, \overline{ab}=\sqrt{\overline{aa}\cdot\overline{bb}}\right\}.$$

Arătaţi că $A = B$.

20. Determinaţi mulţimea $A=\left\{\overline{abcd} \,\middle|\, \sqrt{\overline{abcd}}+\sqrt{\overline{bcd}}+\sqrt{\overline{cd}}=105, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0\right\}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7/2007)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:
a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m < 6\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 4\}$.

(3p) **2.** Se consideră mulţimile $E=\left\{x \mid \overline{71x} \,\vdots\, 5\right\}$ şi $F=\left\{y \mid \overline{8y5} \,\vdots\, 3\right\}$. Efectuaţi:
a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

(3p) **3.** Se consideră mulţimea $A = \{n \mid 3^n < 2^{n+2}\}$. Câte submulţimi are mulţimea A?

Lecţia 2. Intervale numerice şi reprezentarea lor pe axa numerelor

Citesc şi reţin

Definiţii:

Fie a şi b două numere reale, cu $a < b$. Definim:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (**interval închis** de extremităţi a şi b);
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (**interval deschis** de extremităţi a şi b);
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (**interval deschis la stânga şi închis la dreapta** de extremităţi a şi b);
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (**interval închis la stânga şi deschis la dreapta** de extremităţi a şi b).

Intervalele de tipul: $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ se numesc intervale **mărginite** şi au ca reprezentare geometrică un segment, ca în figurile următoare:

GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane: convenţii de notare, reprezentări, determinarea dreptei

Citesc şi reţin

Elementele fundamentale ale geometriei în spaţiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul este descris ca fiind urma lăsată de vârful unui creion ascuţit pe o coală de hârtie. Punctul se notează cu una dintre literele mari ale alfabetului: *A*, *B*, *C*, ...

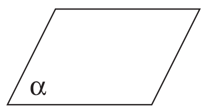
Dreapta este descrisă ca fiind un fir de aţă bine întins şi nesfârşit la ambele capete. Dreapta se notează cu una dintre literele mici ale alfabetului: *a*, *b*, *c*, ...

Planul este descris ca fiind suprafaţa unei ape liniştite. Planul se notează cu una dintre literele greceşti: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...

În continuare vom reprezenta, vom nota şi vom citi un punct, o dreaptă şi un plan.

Punctul *A*

Dreapta *d*

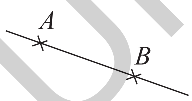


Planul α

Observaţie: Punctul, dreapta şi planul sunt mulţimi de puncte.

Considerăm adevărate, de la început, următoarele **propoziţii**:

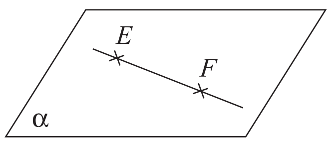
1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una (două puncte distincte determină o dreaptă).



Dreapta determinată de punctele *A* şi *B* se notează *AB* sau *BA*.

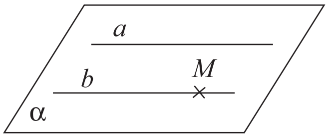
2. Dreapta *d* este inclusă în planul α dacă orice punct al dreptei *d* aparţine planului α. Notăm $d \subset \alpha$.

3. Dacă două puncte distincte ale dreptei *d* aparţin planului α, atunci dreapta *d* este inclusă în planul α.



$$\left.\begin{array}{l}E\in\alpha\\ F\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow EF\subset\alpha$$

4. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă şi numai una la dreapta respectivă.

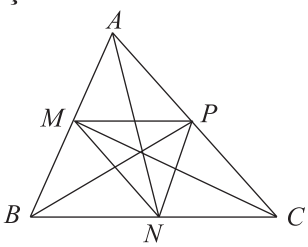


$$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ M\in\alpha \\ b\parallel a \end{array}\right\}\Rightarrow b\subset\alpha$$

Cum se aplică?

1. Dacă punctele A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[CA]$, aflaţi numărul dreptelor determinate de cele şase puncte.

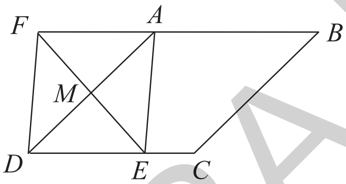
Soluţie:



Cele 6 puncte determină 9 drepte: AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul $E\in(CD)$. Dacă notăm cu M mijlocul laturii $[AD]$ şi cu F simetricul punctului E faţă de M, arătaţi că punctele F, A şi B sunt coliniare.

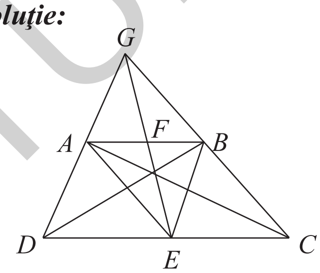
Soluţie:



Deoarece $[AM]\equiv[MD]$ şi $[EM]\equiv[MF]$, rezultă că patrulaterul $AEDF$ este paralelogram, deci $AF\parallel CD$, prin urmare dreptele AF şi AB sunt identice, de unde rezultă că punctele F, A şi B sunt coliniare.

3. În trapezul $ABCD$, notăm cu E şi F mijloacele bazelor $[CD]$, respectiv $[AB]$. Dacă $AD\cap BC=\{G\}$, precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E, F şi G.

Soluţie:



Arătăm că punctele G, F şi E sunt coliniare. Presupunem că $GF\cap CD=\{E_1\}$. Deoarece $AB\parallel CD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\dfrac{GF}{GE_1}=\dfrac{AF}{DE_1}$ şi $\dfrac{GF}{GE_1}=\dfrac{BF}{CE_1}$, deci $\dfrac{AF}{DE_1}=\dfrac{BF}{CE_1}$, de unde deducem că $[DE_1]\equiv[CE_1]$, prin urmare $E_1=E$, deci punctele G, F şi E sunt coliniare. Punctele A, B, C, D, E, F şi G determină 11 drepte: AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF, AE, BE, CF şi DF.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În planul α reprezentat în figura alăturată construiţi punctele distincte E şi F şi dreapta determinată de acestea.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii: Dreapta determinată de punctele E şi F de la problema precedentă se notează:

a) EF; ☐ b) FE. ☐

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

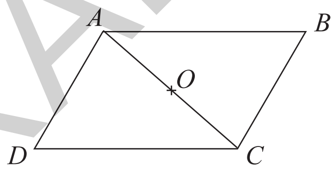
a) Printr-un punct trece o infinitate de drepte. ☐

b) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. ☐

4. În paralelogramul $ABCD$ reprezentat în figura alăturată am notat cu O mijlocul diagonalei $[AC]$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Dreptele BO şi DO sunt distincte. ☐

b) Dreptele BO şi DO sunt identice. ☐



5. În planul β reprezentat în figura alăturată desenaţi punctele distincte şi necoliniare A, B şi C şi dreptele determinate de acestea.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Desenaţi triunghiul DEF şi punctul $G \in (EF)$. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele D, E, F şi G.

7. Desenaţi triunghiul MNP şi punctul Q situat în interiorul acestuia. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele M, N, P şi Q.

8. Dacă punctele A, B şi C, respectiv B, C şi D sunt coliniare, arătaţi că A, B, C şi D sunt patru puncte coliniare.

9. Dacă punctele A, B, C şi D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliţi numărul dreptelor determinate de acestea.

10. Se consideră triunghiul MNP şi punctele $E \in (MN)$ şi $F \in (NP)$. Numiţi dreptele determinate de punctele M, N, P, E şi F.

11. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu M mijlocul laturii $[CD]$ şi cu N simetricul punctului A faţă de M. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D şi N.

12. Într-un plan se consideră cinci puncte, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de cele cinci puncte.

13. Într-un plan se consideră cinci puncte distincte.

a) Aflaţi numărul minim de drepte determinate de cele cinci puncte.

b) Aflaţi numărul maxim de drepte determinate de cele cinci puncte.

14. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului A faţă de dreptele BC, respectiv CD, arătaţi că punctele E, C şi F sunt coliniare.

15. În triunghiul ABC notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Dacă E este simetricul punctului C faţă de M, iar F este simetricul punctului B faţă de N, stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, E şi F.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi punctul $D \in (BC)$. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB, respectiv AC, stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E şi F.

17. Aflaţi numărul dreptelor determinate de n puncte distincte, $n \geq 3$, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Dacă punctele M, N şi P sunt coliniare, iar punctele M, P şi Q sunt necoliniare, arătaţi că punctele M, N şi Q sunt necoliniare.

(3p) **2.** Într-un plan se consideră patru puncte distincte.

a) Aflaţi numărul minim de drepte determinate de cele patru puncte.

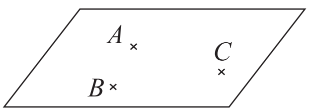
b) Aflaţi numărul maxim de drepte determinate de cele patru puncte.

(3p) **3.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului A faţă de punctele B, respectiv D, arătaţi că punctele E, C şi F sunt coliniare.

Lecţia 2. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

Citesc şi reţin

1. Trei puncte distincte şi necoliniare determină un plan.



Planul determinat de punctele A, B şi C se notează (ABC).

Cuprins