BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar & design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
CHIRCIU, MARIN
Puncte remarcabile în triunghi - Distanţe - Inegalităţi : de la iniţiere la performanţă / Marin Chirciu. - Piteşti : Paralela 45, 2019
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-2982-1

51

Marin Chirciu

PUNCTE REMARCABILE ÎN TRIUNGHI DISTANŢE. INEGALITĂŢI

De la iniţiere la performanţă

Editura Paralela 45

A fost odată un evreu înţelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în cap**.

Îl chema SOLOMON.

După el, a venit un alt evreu înţelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în inimă**.

Îl chema ISUS.

După el, a venit un al treilea evreu înţelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în stomac**.

Îl chema MARX.

După el, a venit un al patrulea evreu înţelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai între picioare**.

Îl chema FREUD.

La sfârşit, a venit un alt evreu înţelept, mai înţelept decât toţi (pe nume EINSTEIN) şi a zis

„**Totul e relativ**”.

Cuprins

Capitolul 1

Identităţi remarcabile într-un triunghi

„Fiecare om are un orizont. Când acest orizont se îngustează foarte mult, el devine un punct, iar omul exclamă: ***Iată punctul meu de vedere****.”*

David Hilbert

§ 1.1. Identități remarcabile cu laturi şi raze

$$\sum (p-a)(a+b)(a+c) = p\left(p^2+5r^2+8Rr\right).$$

$$\sum a^2 = 2\left(p^2-r^2-4Rr\right). \qquad \sum a^2 = 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right).$$

$$\sum a^4 = 2\left[p^4-p^2\left(8Rr+6r^2\right)+r^2(4R+r)^2\right].$$

$$\sum b^2c^2 = p^4+p^2\left(2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum a^2(p-a)^2 = 2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right].$$

$$\sum \frac{a(b+c)^2}{bc(p-a)} = \frac{p^2-3r^2}{r^2}. \qquad \sum \frac{(b+c)^2}{b^2c^2(p-a)} = \frac{p^2-3r^2}{4Rr^3p}.$$

$$\sum a^2(b+c)^2(p-b)(p-c) = 4p^2Rr\left(p^2-3r^2\right).$$

$$\sum \frac{a^2(b+c)^2}{p(p-a)} = \frac{4R}{r}\left(p^2-3r^2\right).$$

$$\sum a^2(b+c)(p-b)(p-c) = 2pr\left[p^2(2R-r)-r^2(4R+r)\right].$$

$$\sum \frac{a(b+c)^2}{p(p-a)} = \frac{2}{rp}\left[p^2(2R+r)+r^2(4R+r)\right].$$

$$\sum a(b+c)^2(p-b)(p-c) = 2rp\left[p^2(2R+r)+r^2(4R+r)\right].$$

$$\sum \frac{a^2(b+c)}{p(p-a)} = \frac{2}{rp}\left[p^2(2R-r)-r^2(4R+r)\right].$$

$$\sum \frac{a(p-b)(p-c)}{(a+b)^2(a+c)^2} = \frac{r\left[p^2(2R+r)+r^2(4R+r)\right]}{2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}.$$

$$\sum \frac{p-a}{b+c} = \frac{p^2+5r^2+8Rr}{2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}. \qquad \sum \frac{p-a}{a} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}.$$

$$\sum bc\left(b^2+c^2\right) = 2p^4-8p^2Rr-2r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum bc\left(b^3+c^3\right) = 2p\left[p^4-p^2\left(2r^2+4Rr\right)-r^2\left(8R^2+14Rr+3r^2\right)\right].$$

$$\sum \frac{b^2+c^2}{p-a} = \frac{2p^2(2R+3r)-2r(4R+r)^2}{rp}.$$

$$\sum\left(b^2+c^2\right)(p-b)(p-c) = 2p^2\left(2Rr+3r^2\right)-2r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum(b+c)(p-b)^3(p-c)^3 = 2r^3p\left[(4R+r)^2(2R+r)-p^2(6R+r)\right].$$

$$\sum \frac{(b+c)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2} = \frac{2}{rp}\left[(4R+r)^2(2R+r)-p^2(6R+r)\right].$$

$$\sum bc(b+c)(p-b)(p-c) = 2r^2p\left[p^2+(4R+r)(2R+r)\right].$$

$$\sum \frac{b+c}{a(p-a)} = \frac{p^2+(4R+r)(2R+r)}{2Rrp}.$$

$$\sum a(b+c)(p-b)^2(p-c)^2 = 2r^2p^2\left(8R^2+4Rr-r^2-p^2\right).$$

$$\sum \frac{(b+c)(p-b)(p-c)}{bc(p-a)} = \frac{8R^2+4Rr-r^2-p^2}{2Rr}.$$

$$\sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2+r^2+10Rr}{2Rr}. \qquad \sum a(a+b)(a+c) = 4p\left(p^2-r^2-Rr\right).$$

$$\sum a^2(a+b)(a+c) = 4p^2\left(p^2-3r^2-4Rr\right).$$

$$\sum \frac{a}{bc(b+c)} = \frac{p^2-3r^2-4Rr}{2Rr\left(p^2+r^2+2Rr\right)}.$$

$$\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2\left(p^2-r^2-Rr\right)}{p^2+r^2+2Rr}. \qquad \sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}.$$

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \frac{2\left[p^4-p^2\left(4Rr+6r^2\right)+r^2\left(6R^2+4Rr+r^2\right)\right]}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}.$$

$$\sum a^2(a+b)^2(a+c)^2 = 8p^2\left[p^4-p^2\left(4Rr+6r^2\right)+r^2\left(6R^2+4Rr+r^2\right)\right].$$

capitolul
2
Inegalităţi într-un triunghi obţinute cu ajutorul numerelor complexe

„Definiţia nebuniei: Să faci aceleaşi lucruri zi de zi şi să aştepţi rezultate diferite."

Albert Einstein

Sunt adevărate egalitățile:

1) $(z-z_1)(z_2-z_3)+(z-z_2)(z_3-z_1)+(z-z_3)(z_1-z_2)=0$, $\forall z,\ z_1,\ z_2,\ z_3\in\mathbb{C}$.

2) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$, $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$.

3) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$, $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$.

4) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$, $\forall z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$.

5) $\left|\vec{v}_1+\vec{v}_2\right|^2+\left|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right|^2=2\left(\left|\vec{v}_1\right|^2+\left|\vec{v}_2\right|^2\right)$, $\forall\ \overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ vectori din plan.

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1,\ \forall a,\ b,\ c\in\mathbb{C}.$$

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind formula de mai sus.
Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile:

2.1. a) Dacă x, y, z, t sunt numere complexe distincte, verificaţi identitatea:

$$\frac{x(x-t)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y(y-t)}{(y-z)(y-x)}+\frac{z(z-t)}{(z-x)(z-y)}=1.$$

b) Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c, iar P și P' două puncte oarecare în planul triunghiului. Arătaţi că există inegalitatea:

$$\frac{PA\cdot PA'}{bc}+\frac{PB\cdot PB'}{ca}+\frac{PC\cdot PC'}{ab}\geq 1.$$

c) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{b+c}{bc}\cdot m_a l_a+\frac{c+a}{ca}\cdot m_b l_b+\frac{a+b}{ab}\cdot m_c l_c\geq 3p.$$

d) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$m_a \cos\frac{A}{2} + m_b \cos\frac{B}{2} + m_c \cos\frac{C}{2} \geq \frac{3p}{2}.$$

e) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$am_a + bm_b + cm_c \geq 6S.$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.2. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu laturile BC, CA, AB. Se consideră numerele $\alpha, \beta, \gamma > 0$ astfel încât:

$$\frac{\alpha}{S(PBC)} = \frac{\beta}{S(PCA)} = \frac{\gamma}{S(PAB)},$$

adică α, β, γ sunt coordonatele baricentrice ale punctului P. Arătaţi că au loc relațiile:

a) $\dfrac{PA}{AA_1} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$; b) $\dfrac{PA}{AA_1} + \dfrac{PB}{BB_1} + \dfrac{PC}{CC_1} = 2$;

c) $\dfrac{AA_1}{PA} + \dfrac{BB_1}{PB} + \dfrac{CC_1}{PC} \geq \dfrac{9}{2}$;

d) $\dfrac{\beta+\gamma}{bc} \cdot AA_1 + \dfrac{\gamma+\alpha}{ca} \cdot BB_1 + \dfrac{\alpha+\beta}{ab} \cdot CC_1 \geq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{R}$.

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.3. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, verificaţi identitatea:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = -(x-y)(y-z)(z-x).$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC, arătaţi că există inegalitatea:

$$a \cdot PB \cdot PC + b \cdot PC \cdot PA + c \cdot PA \cdot PB \geq abc.$$

China, 1998

c) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^2(a+b+c) \geq abc.$$

d) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot IB \cdot IC + b \cdot IC \cdot IA + c \cdot IA \cdot IB \geq abc.$$

e) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a\sin\frac{A}{2} + b\sin\frac{B}{2} + c\sin\frac{C}{2} \geq p.$$

f) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot HB \cdot HC + b \cdot HC \cdot HA + c \cdot HA \cdot HB \geq abc.$$

g) Arătaţi că în triunghiul ABC ascuțitunghic există inegalitatea:

$$a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B \geq \frac{S}{R}.$$

h) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot GB \cdot GC + b \cdot GC \cdot GA + c \cdot GA \cdot GB \geq abc.$$

i) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$am_b m_c + bm_c m_a + \mathrm{cm}_a m_b \geq \frac{9}{4}abc.$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.4. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, Verificaţi identitatea:

$$x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3 = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC, arătaţi că există inegalitatea:

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG.$$

c) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq 3abc \cdot OG.$$

d) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a^3 \cdot IA + b^3 \cdot IB + c^3 \cdot IC \geq 3abc \cdot IG.$$

e) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{a^3}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{b^3}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{c^3}{\sin\frac{C}{2}} \geq 3\frac{abc}{r} IG.$$

f) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a^3 \cdot HA + b^3 \cdot HB + c^3 \cdot HC \geq 3abc \cdot HG.$$

g) Arătaţi că în triunghiul ABC ascuțitunghic există inegalitatea:

$$a^3 \cos A + b^3 \cos B + c^3 \cos C \geq 6S \cdot HG.$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.5. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, verificaţi identitatea:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC, arătaţi că există inegalitatea:

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG.$$

c) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^3(a+b+c) \geq 3abc \cdot OG.$$

d) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^2 \geq 6r \cdot OG.$$

e) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot IA^3 + b \cdot IB^3 + c \cdot IC^3 \geq 3abc \cdot IG.$$

f) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{a}{\sin^3\frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^3\frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^3\frac{C}{2}} \geq 3\frac{abc}{r^3} IG.$$

g) Arătaţi că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot HA^3 + b \cdot HB^3 + c \cdot HC^3 \geq 3abc \cdot HG.$$