

EDITURA PARALELA 45



Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar & design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

CHIRCIU, MARIN

Puncte remarcabile în triunghi - Distanțe - Inegalități : de la inițiere la performanță / Marin Chirciu. - Pitești : Paralela 45, 2019

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2982-1

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Marin Chirciu

**PUNCTE REMARCABILE
ÎN TRIUNGHI
DISTANȚE. INEGALITĂȚI
DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ**

Editura Paralela 45

A fost odată un evreu înțelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în cap**.

Îl chema SOLOMON.

După el, a venit un alt evreu înțelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în inimă**.

Îl chema ISUS.

După el, a venit un al treilea evreu înțelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai în stomac**.

Îl chema MARX.

După el, a venit un al patrulea evreu înțelept care zicea că totul se poate reduce la **ceea ce ai între picioare**.

Îl chema FREUD.

La sfârșit, a venit un alt evreu înțelept, mai înțelept decât toți (pe nume EINSTEIN) și a zis

„**Totul e relativ**”.

Cuprins

	Soluții
Capitolul 1 – Identități remarcabile într-un triunghi	7
§ 1.1. – Identități remarcabile cu laturi și raze	7
§ 1.2. – Identități remarcabile cu linii importante în triunghi	23
1.2.1. – Identități remarcabile cu înălțimi.....	23
1.2.2. – Identități remarcabile cu razele cercurilor exînscrie	26
1.2.3. – Identități remarcabile cu mediane.....	28
1.2.4. – Identități remarcabile cu bisectoare.....	33
1.2.5. – Identități trigonometrice.....	34
1.2.6. – Identități diverse	36
§ 1.3. – Inegalități remarcabile într-un triunghi.....	44
Capitolul 2 – Inegalități într-un triunghi obținute cu ajutorul numerelor complexe.....	46
Capitolul 3 – Inegalități cu G , centrul de greutate al triunghiului	55
§ 3.1. – Identități remarcabile	55
§ 3.2. – Inegalități cu GA, GB, GC	55
Capitolul 4 – Inegalități cu H , ortocentrul triunghiului.....	68
§ 4.1. – Identități remarcabile	68
§ 4.2. – Inegalități cu HA, HB, HC	69
Capitolul 5 – Inegalități cu I , centrul cercului înscris triunghiului	74
§ 5.1. – Identități remarcabile	74
§ 5.2. – Inegalități cu IA, IB, IC	74
Capitolul 6 – Inegalități cu O , centrul cercului circumscris triunghiului.....	98
§ 6.1. – Identități remarcabile	98
§ 6.2. – Inegalități cu OA, OB, OC	98
Capitolul 7 – Inegalități cu I_a, I_b, I_c , centrele cercurilor exînscrie	105
Capitolul 8 – Inegalități diverse	108
<i>Bibliografie</i>	307

capitolul

1

Identități remarcabile într-un triunghi

„Fiecare om are un orizont. Când acest orizont se îngustează foarte mult, el devine un punct, iar omul exclamă: **Iată punctul meu de vedere.**”

David Hilbert

§ 1.1. Identități remarcabile cu laturi și raze

$$\sum (p-a)(a+b)(a+c) = p(p^2 + 5r^2 + 8Rr).$$

$$\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

$$\sum a^2 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

$$\sum a^4 = 2[p^4 - p^2(8Rr + 6r^2) + r^2(4R+r)^2].$$

$$\sum b^2c^2 = p^4 + p^2(2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum a^2(p-a)^2 = 2r^2[(4R+r)^2 - p^2].$$

$$\sum \frac{a(b+c)^2}{bc(p-a)} = \frac{p^2 - 3r^2}{r^2}.$$

$$\sum \frac{(b+c)^2}{b^2c^2(p-a)} = \frac{p^2 - 3r^2}{4Rr^3p}.$$

$$\sum a^2(b+c)^2(p-b)(p-c) = 4p^2Rr(p^2 - 3r^2).$$

$$\sum \frac{a^2(b+c)^2}{p(p-a)} = \frac{4R}{r}(p^2 - 3r^2).$$

$$\sum a^2(b+c)(p-b)(p-c) = 2pr[p^2(2R-r) - r^2(4R+r)].$$

$$\sum \frac{a(b+c)^2}{p(p-a)} = \frac{2}{rp}[p^2(2R+r) + r^2(4R+r)].$$

$$\sum a(b+c)^2(p-b)(p-c) = 2rp[p^2(2R+r) + r^2(4R+r)].$$

$$\sum \frac{a^2(b+c)}{p(p-a)} = \frac{2}{rp}[p^2(2R-r) - r^2(4R+r)].$$

$$\sum \frac{a(p-b)(p-c)}{(a+b)^2(a+c)^2} = \frac{r[p^2(2R+r)+r^2(4R+r)]}{2p(p^2+r^2+2Rr)^2}.$$

$$\sum \frac{p-a}{b+c} = \frac{p^2+5r^2+8Rr}{2(p^2+r^2+2Rr)}, \quad \sum \frac{p-a}{a} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}.$$

$$\sum bc(b^2+c^2) = 2p^4 - 8p^2Rr - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum bc(b^3+c^3) = 2p[p^4 - p^2(2r^2+4Rr) - r^2(8R^2+14Rr+3r^2)].$$

$$\sum \frac{b^2+c^2}{p-a} = \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{rp}.$$

$$\sum (b^2+c^2)(p-b)(p-c) = 2p^2(2Rr+3r^2) - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$\sum (b+c)(p-b)^3(p-c)^3 = 2r^3p[(4R+r)^2(2R+r) - p^2(6R+r)].$$

$$\sum \frac{(b+c)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2} = \frac{2}{rp}[(4R+r)^2(2R+r) - p^2(6R+r)].$$

$$\sum bc(b+c)(p-b)(p-c) = 2r^2p[p^2 + (4R+r)(2R+r)].$$

$$\sum \frac{b+c}{a(p-a)} = \frac{p^2 + (4R+r)(2R+r)}{2Rrp}.$$

$$\sum a(b+c)(p-b)^2(p-c)^2 = 2r^2p^2(8R^2+4Rr-r^2-p^2).$$

$$\sum \frac{(b+c)(p-b)(p-c)}{bc(p-a)} = \frac{8R^2+4Rr-r^2-p^2}{2Rr}.$$

$$\sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2+r^2+10Rr}{2Rr}, \quad \sum a(a+b)(a+c) = 4p(p^2-r^2-Rr).$$

$$\sum a^2(a+b)(a+c) = 4p^2(p^2-3r^2-4Rr).$$

$$\sum \frac{a}{bc(b+c)} = \frac{p^2-3r^2-4Rr}{2Rr(p^2+r^2+2Rr)}.$$

$$\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr}, \quad \sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}.$$

$$\sum \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \frac{2[p^4 - p^2(4Rr+6r^2) + r^2(6R^2+4Rr+r^2)]}{(p^2+r^2+2Rr)^2}.$$

$$\sum a^2(a+b)^2(a+c)^2 = 8p^2[p^4 - p^2(4Rr+6r^2) + r^2(6R^2+4Rr+r^2)].$$

Inegalități într-un triunghi obținute cu ajutorul numerelor complexe

„Definiția nebuniei: Să faci aceleași lucruri zi de zi și să aștepți rezultate diferite.”

Albert Einstein

Sunt adevărate egalitățile:

$$1) (z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0, \forall z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

$$2) x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = -(x - y)(y - z)(z - x), \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

$$3) x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) = -(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z), \\ \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

$$4) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$5) |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = 2(|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2), \forall \vec{v}_1 \text{ și } \vec{v}_2 \text{ vectori din plan.}$$

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1, \forall a, b, c \in \mathbb{C}.$$

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind formula de mai sus. Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile:

2.1. a) Dacă x, y, z, t sunt numere complexe distincte, verificați identitatea:

$$\frac{x(x-t)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(y-t)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(z-t)}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

b) Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c , iar P și P' două puncte oarecare în planul triunghiului. Arătați că există inegalitatea:

$$\frac{PA \cdot PA'}{bc} + \frac{PB \cdot PB'}{ca} + \frac{PC \cdot PC'}{ab} \geq 1.$$

c) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{b+c}{bc} \cdot m_a l_a + \frac{c+a}{ca} \cdot m_b l_b + \frac{a+b}{ab} \cdot m_c l_c \geq 3p.$$

d) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$m_a \cos \frac{A}{2} + m_b \cos \frac{B}{2} + m_c \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3p}{2}.$$

e) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$am_a + bm_b + cm_c \geq 6S.$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.2. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu laturile BC, CA, AB . Se consideră numerele $\alpha, \beta, \gamma > 0$ astfel încât:

$$\frac{\alpha}{S(PBC)} = \frac{\beta}{S(PCA)} = \frac{\gamma}{S(PAB)},$$

adică α, β, γ sunt coordonatele baricentrice ale punctului P . Arătați că au loc relațiile:

$$a) \frac{PA}{AA_1} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}; \quad b) \frac{PA}{AA_1} + \frac{PB}{BB_1} + \frac{PC}{CC_1} = 2;$$

$$c) \frac{AA_1}{PA} + \frac{BB_1}{PB} + \frac{CC_1}{PC} \geq \frac{9}{2};$$

$$d) \frac{\beta + \gamma}{bc} \cdot AA_1 + \frac{\gamma + \alpha}{ca} \cdot BB_1 + \frac{\alpha + \beta}{ab} \cdot CC_1 \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{R}.$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.3. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, verificați identitatea:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = -(x-y)(y-z)(z-x).$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC , arătați că există inegalitatea:

$$a \cdot PB \cdot PC + b \cdot PC \cdot PA + c \cdot PA \cdot PB \geq abc.$$

China, 1998

c) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^2(a+b+c) \geq abc.$$

d) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot IB \cdot IC + b \cdot IC \cdot IA + c \cdot IA \cdot IB \geq abc.$$

e) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \sin \frac{A}{2} + b \sin \frac{B}{2} + c \sin \frac{C}{2} \geq p.$$

f) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot HB \cdot HC + b \cdot HC \cdot HA + c \cdot HA \cdot HB \geq abc.$$

g) Arătați că în triunghiul ABC ascuțitunghic există inegalitatea:

$$a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B \geq \frac{S}{R}.$$

h) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot GB \cdot GC + b \cdot GC \cdot GA + c \cdot GA \cdot GB \geq abc.$$

i) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$am_b m_c + bm_c m_a + cm_a m_b \geq \frac{9}{4} abc .$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.4. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, Verificați identitatea:

$$x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3 = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) .$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC , arătați că există inegalitatea:

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG .$$

c) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3abc \cdot OG .$$

d) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a^3 \cdot IA + b^3 \cdot IB + c^3 \cdot IC \geq 3abc \cdot IG .$$

e) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{a^3}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{b^3}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{c^3}{\sin \frac{C}{2}} \geq 3 \frac{abc}{r} IG .$$

f) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a^3 \cdot HA + b^3 \cdot HB + c^3 \cdot HC \geq 3abc \cdot HG .$$

g) Arătați că în triunghiul ABC ascuțitunghic există inegalitatea:

$$a^3 \cos A + b^3 \cos B + c^3 \cos C \geq 6S \cdot HG .$$

RMG 10/1991, Mircea Bîrsan, Iași

2.5. a) Dacă x, y, z sunt numere complexe, verificați identitatea:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) .$$

b) Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC , arătați că există inegalitatea:

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG .$$

c) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^3(a+b+c) \geq 3abc \cdot OG .$$

d) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$R^2 \geq 6r \cdot OG .$$

e) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot IA^3 + b \cdot IB^3 + c \cdot IC^3 \geq 3abc \cdot IG .$$

f) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$\frac{a}{\sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^3 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^3 \frac{C}{2}} \geq 3 \frac{abc}{r^3} IG .$$

g) Arătați că în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a \cdot HA^3 + b \cdot HB^3 + c \cdot HC^3 \geq 3abc \cdot HG .$$