CORINT


Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța


# MATEMATICĂ

## Manual pentru clasa a VI-a

# CUVÂNT-ÎNAINTE

*„Când am pornit la scrierea acestui manual, prima întrebare pe care ne-am pus-o a fost: Cui se adresează manualul? Nu a fost o hotărâre ușor de luat, mai ales că, acolo unde sunt mai multe persoane, sunt desigur și multe păreri. Am hotărât până la urmă ca manualul nostru să se adreseze în același timp și elevilor, și părinților, și profesorilor.”*

*Extras din PREFAŢA manualului de matematică pentru clasa a V-a*

Păstrând ca linie directoare aceeaşi idee, manualul pentru clasa a VI-a vine ca o continuare naturală, firească, la ceea ce am realizat în manualul pentru clasa a V-a. Prin modul de introducere a noţiunilor am intenţionat (şi sperăm că am şi reuşit) să optimizăm raportul dintre *înţelegerea intuitivă* de către elevi a acestor noţiuni şi formarea unei *gândiri matematice* specifice noţiunilor prezentate. Şi pentru ca aceste noţiuni să nu rămână la nivelul unei înţelegeri superficiale, le-am întărit prin exemple, le-am argumentat şi corelat cu noţiunile cunoscute, dar şi cu realitatea înconjurătoare.

Prin activităţile practice, dar şi prin provocările lansate odată cu introducerea construcțiilor geometrice, ne-am propus să folosim curiozitatea înnăscută a elevului pentru a-l familiariza cu figurile geometrice, pentru a-i consolida deprinderile de utilizare a instrumentelor geometrice, dar şi pentru a-l iniţia în tainele rezolvării problemelor de geometrie pe bază de raţionament.

Manualul poate fi o bună sursă de inspiraţie pentru profesorii la început de carieră (şi nu numai), pentru că am încercat să construim cartea sub forma unui îndrumar, care să le ghideze pașii în parcurgerea etapelor unei lecții, care să le sugereze tipuri de exerciții care pot fixa noțiunile și, eventual, să le sugereze numărul exercițiilor care pot fi rezolvate într-o oră și a celor care pot fi propuse ca temă pentru acasă, o temă care să nu aglomereze după-amiaza elevului.

Lucrarea respectă în totalitate programa şcolară aprobată prin OM nr. 3393 din 2017, a primit aviz ştiinţific și a fost admisă în urma evaluării Centrului Național de Evaluare și Examinare. Manualul este aprobat în vederea utilizării în sistemul de învăţământ, începând cu anul şcolar 2018-2019, prin OMEN nr. 3970 din 15.06.2018.

***Autorii***

## Cu Editura Corint
## viitorul este mai aproape de tine!

Și în acest manual, ca și în manualul de matematică pentru clasa a V-a, ai posibilitatea de a accesa filmulețe matematice cu ajutorul codurilor QR. Nu ai nevoie decât de un dispozitiv mobil dotat cu cameră video și acces la internet, de exemplu un smartphone, și de instalarea unei aplicații pentru scanarea codurilor QR. Ai astfel la dispoziție o metodă plăcută și captivantă de transmitere a informației, care te va ajuta să înțelegi și să înveți mai ușor matematica.

Mult succes!

# MULŢIMI. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

## Mulţimi

Mirela face ordine în camera ei și a adunat în mijlocul camerei mai multe obiecte. Pentru a le așeza la locul lor, mai întâi vrea să le grupeze. Ea aranjează obiectele în 3 grupe astfel:

- prima grupă conține: 3 manuale, 2 culegeri de probleme și 4 cărți de citit;
- a doua grupă conține: 2 fuste, o rochie și o pereche de pantaloni;
- a treia grupă conține 4 păpuși, un ursuleț de pluș și un trenuleț de jucărie.

Prima grupă este o *mulțime* de cărți și le ordonează în bibliotecă. A doua grupă este o *mulțime* de haine și le aranjează în dulap, iar a treia grupă este o *mulțime* cu jucării și este aranjată în cutia de jucării. Spunem că Mirela a aranjat obiectele din mijlocul camerei în 3 *mulțimi*, în funcție de utilitatea lor.

**SĂ ÎNVĂŢĂM!**

❖ *Mulţimea* este o colecţie (grup, ansamblu, grămadă) de mai multe *obiecte distincte* care au o proprietate comună. Obiectele se numesc *elementele mulţimii*.

❖ Mulţimile se notează cu litere mari: *A*, *B*, *C*, *D*, ... ; elementele mulţimii se notează cu litere mici.

O mulţime poate fi reprezentată:

| | | |
|---|---|---|
| • prin enumerarea elementelor şi scrierea acestora între două acolade. | • printr-o proprietate caracteristică comună tuturor elementelor mulţimii. | • grafic, încadrând elementele în interiorul unei curbe închise (cerc, oval), numită *diagrama Venn-Euler*. |

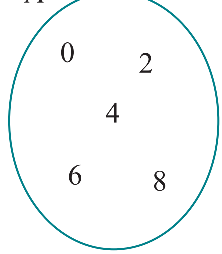
❖ Considerăm *mulţimea cifrelor pare* şi o reprezentăm prin cele trei metode (mulțime numerică):

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

$A = \{x \mid x$ cifră pară$\}$

- citim: *mulțimea elementelor x* cu proprietatea *că x este cifră pară*;
- semnul „|” este citit: *cu proprietatea.*

*A*

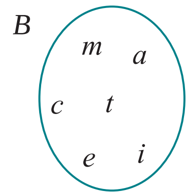


$B = \{m, a, t, e, i, c\}$.

• chiar dacă unele litere se repetă în cuvânt, în mulţime apar o singură dată scrise.

$B = \{x \mid x$ este literă în cuvântul *matematica*$\}$

• citim: *mulțimea elementelor x cu* proprietatea că *x este literă în cuvântul matematica*.




*Primul matematician care a vorbit despre mulțimi a fost G. Cantor (1845-1918) în ceea ce numim astăzi teoria naivă a mulțimilor.*

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

- ❖ Dacă un element $x$ face parte dintr-o mulţime $A$, se scrie $x \in A$ şi se citeşte „*x aparţine lui A*”.
- ❖ Dacă un element $y$ nu se găsește într-o mulţime $B$, se scrie $y \notin B$ şi se citeşte „*y nu aparţine lui B*”.
- ❖ Într-o mulţime, fiecare element se scrie o singură dată. Ordinea în care se scriu elementele nu contează, însă la mulțimile numerice, în general, vom scrie numerele în ordine crescătoare (pentru a observa mai ușor dacă am scris toate elementele).
- ❖ Mulţimea care nu are niciun element se numeşte *mulţime vidă* şi se notează $\varnothing$.

*Semnul „∈” reprezintă scrierea stilizată a primei litere din cuvântul grecesc „ε σ τ ν” (este) şi a fost folosit prima dată de matematicianul italian G. Peano (1858-1932).*

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➢ Fie mulțimea $A=\{0,1,2,3,4\}$. Elementele mulțimii sunt numerele 0, 1, 2, 3 și 4. Putem scrie în relații astfel: $0 \in A$, $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ și $4 \in A$. Numerele 5 și 6 nu sunt în mulțimea $A$. Scriem în relații: $5 \notin A$, $6 \notin A$.

➢ Se dau mulţimile $A=\{0,1,2\}$ și $B=\{2,4,6,8,10\}$. Copiați tabelul în caiete și completați al doilea rând după model, specificând dacă afirmațiile sunt adevărate sau false:

| $1 \in A$ | $2 \notin A$ | $0 \in A$ | $0 \in B$ | $2 \in B$ | $10 \in B$ | $6 \in B$ | $4 \notin B$ | $8 \notin B$ | $12 \in B$ | $12 \in \varnothing$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| adevărat | fals | | | | | | | | | |

➢ Enumerați elementele mulțimilor următoare: mulțimea $A$ a multiplilor lui 2 care sunt cifre şi mulţimea $B$ a numerelor pare mai mici decât 9.

*Rezolvare*: $A=\{0,2,4,6,8\}$, $B=\{0,2,4,6,8\}$.
Observăm că cele două mulțimi au aceleași elemente.

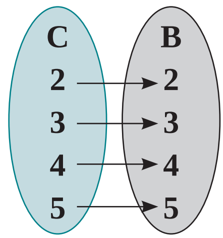
## SĂ ÎNVĂȚĂM!

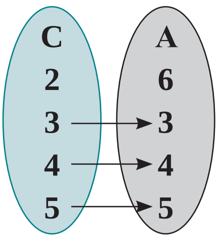
- Două mulţimi *A* şi *B* sunt *egale* dacă sunt formate din aceleaşi elemente. Se notează $A=B$.
- Dacă două mulțimi sunt egale, atunci orice element care aparţine mulţimii *A* este şi element al mulţimii *B* şi, reciproc, orice element al mulţimii *B* este şi element al mulţimii *A*.
- Dacă cel puţin un element al mulţimii *A* nu aparţine mulţimii *B*, sau invers, se spune că mulţimile *A* şi *B* sunt *diferite*. Se notează $A \neq B$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➢ Fie mulțimile $A=\{x \mid x \text{ număr natural}, 2<x\leq 6\}$, $B=\{x \mid x \text{ număr natural}, 2\leq x<6\}$ și $C=\{2,3,4,5\}$. Sunt egale mulțimile date?

*Rezolvare:* $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $C=\{2,3,4,5\}$.

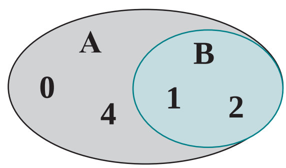



Mulțimile *C* și *B* au aceleași elemente, deci *C* = *B*. Observăm în diagrama Venn-Euler că mulțimile *C* și *B* sunt egale prin corespondența cu săgeți.

În mulţimea *A* nu avem elementul 2, care este în celelalte mulţimi, şi avem în plus elementul 6. Deci $A\neq C$, pentru că numărul 2 din mulţimea *C* nu se regăseşte în mulţimea *A*. Așadar, chiar dacă *A* şi *C* au acelaşi număr de elemente ele nu sunt egale. La fel şi $B\neq C$.

➢ Fie mulțimile *A* și *B* din figură. În ce mulțime se găsesc elementele 0, 1, 2, 4?




*Rezolvare:* Observăm din figură că $A=\{0,1,2,4\}$ și $B=\{1,2\}$, deci $0\in A$, $0\notin B$, $4\in A$, $4\notin B$, $1\in A$, $1\in B$, $2\in A$, $2\in B$. Așadar putem spune că elementele din mulțimea *B* sunt și în mulțimea *A*, dar în mulțimea *A* sunt elemente care nu sunt și în mulțimea *B*.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

- O mulţime $B$ este *inclusă* într-o mulţime $A$ dacă orice element al mulţimii $B$ aparţine şi mulţimii $A$. Se notează $B \subset A$. Putem spune şi că mulţimea $A$ *include* mulţimea $B$ şi se notează $A \supset B$. Mulțimea $B$ se numește *submulțime* a mulţimii $A$.
- Dacă cel puţin un element al mulţimii $B$ nu este şi element al mulţimii $A$, se spune că mulţimea $B$ *nu este inclusă* în mulţimea $A$ şi se foloseşte notaţia $B \not\subset A$.

## OBSERVĂM:

✓ Mulţimea vidă este inclusă în orice mulţime.

✓ Orice mulţime este inclusă în ea însăşi (*reflexivitatea*), $A \subset A$.

✓ Dacă $A$ şi $B$ sunt două mulţimi astfel încât $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci $A = B$ (*antisimetria*).

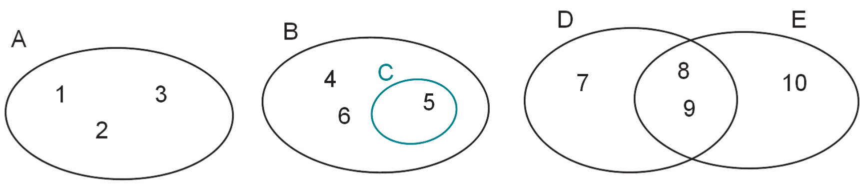
✓ Dacă $A$, $B$ şi $C$ sunt trei mulţimi astfel încât $A \subset B$ şi $B \subset C$, atunci $A \subset C$ (*tranzitivitatea*).

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➤ Fie mulţimile $A = \{0,2\}$, $B = \{0,3,6\}$, $C = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Arătați că $A \subset C$, $B \subset C$, $A \not\subset B$ şi $C \not\subset A$.

*Rezolvare:* Cum $0 \in A$, $2 \in A$ şi $0 \in C$, $2 \in C$, spunem că $A \subset C$.
$0 \in B$, $3 \in B$, $6 \in B$ şi $0 \in C$, $3 \in C$, $6 \in C$ spunem că $B \subset C$.
Elementul $2 \in A$ şi $2 \notin B$, deci $A \not\subset B$; $C \not\subset A$ pentru că $3 \in C$ şi $3 \notin A$.

➤ Scrieți elementele fiecărei mulțimi din figură. Sunt mulțimi în relație de incluziune?




*Rezolvare:* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{5\}$, $D = \{7,8,9\}$, $E = \{8,9,10\}$; $C \subset B$.
Putem spune și că $\varnothing$ este inclusă în fiecare dintre mulțimile date și că oricare dintre mulțimi este inclusă în ea însăși.

## EXERSAȚI SINGURI!

**1.** Scrieți mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul „paralelipiped” folosind cele trei moduri de reprezentare a unei mulțimi.

**2.** Scrieți mulțimea $A=\{1,2,4,8,16,32,64,128\}$ cu ajutorul unei proprietăți caracteristice.

**3.** Următoarele mulțimi sunt reprezentate prin enumerare. Reprezentați-le și prin celelalte două moduri: $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{0,2,4,6,8\}$, $D=\{1,3,9\}$, $E=\{0,4,8\}$, $F=\{0,5\}$.

**4.** Enumerați elementele mulțimilor:

$A=\{l \mid l$ literă în cuvântul „picior”$\}$; $B=\{x \mid x$ număr natural, $2^x \leq 16\}$;

$C=\{x \mid x$ număr natural, $7<x\leq 11\}$; $D=\{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ divizibil cu 5, $a$ cifră impară$\}$.

**5.** Stabiliți care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false:

a) $\{1,2,3\}=\{12,3\}$; b) $\{0,1\}\subset\{0,1,2,3\}$; c) $\varnothing=\{0\}$;

d) $\{0,5\}\subset\{0,4,5\}$; e) $\varnothing\subset\{0\}$; f) $\{45,54\}\subset\{4,5\}$.

**6.** Determinați numărul natural $n$ știind că:

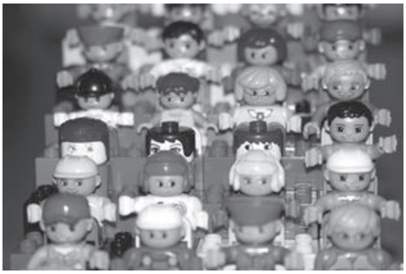
a) $\{1,n,3\}=\{1,2,3\}$; b) $\{2,n\}\subset\{0,1,2,3\}$; c) $\{3,6,9\}\supset\{3n\}$;

d) $\{n^2,5\}\subset\{0,4,5\}$; e) $\{1,n,n+1\}\subset\{1,4,5\}$.

**7.** Fie mulțimea $A=\{5,7,9\}$. Scrieți toate submulțimile mulțimii $A$ și formați o mulțime cu acestea.

*Indicație*: Nu uitați să scrieți și mulțimea vidă. Trebuie să obțineți 8 submulțimi.

*În general, dacă A este o mulțime care are n elemente, ea are $2^n$ submulțimi.*

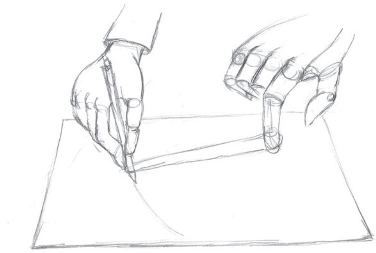


*Mulțime, mulțimi, s. f.*
*1. (La sg., adesea cu determinări) Număr mare de ființe sau de lucruri, cantitate mare.*
*2. (La sg.) Lume multă strânsă laolaltă, grămadă de oameni; spec. masele largi ale populației; colectivitate.*

*(DEX)*

# Cercul

## ACTIVITATE PRACTICĂ



Deasupra unui polistiren puneţi o coală de hârtie albă pe care o prindeţi în colţuri cu bolduri. Notaţi pe foaie un punct $O$. Luaţi o bucată de aţă, puneţi-o în două şi înnodaţi-i capetele. Agăţaţi partea înnodată cu un deget şi fixaţi poziţia acestuia în punctul $O$, introduceţi un creion între cele două fire şi întindeţi aţa. Având grijă ca firul să stea tot timpul întins, trasaţi cu creionul o linie curbă, până ce aceasta se *închide*.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Fiind dat un punct $O$ şi un număr $r$, se numeşte *cerc de centru O și rază r* mulţimea punctelor din plan situate la distanţa $r$ faţă de $O$.
Notăm: $C(O,r) = \{M$ din plan $|$ $OM = r\}$ şi citim *cercul de centru O şi rază r.*
Segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct al cercului se numeşte *rază*.
Prin *rază* înţelegem şi lungimea acestui segment.

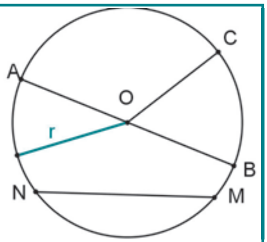
❖ Altfel spus: *Cercul este figura geometrică alcătuită din toate punctele din plan care se află la aceeaşi distanţă faţă de un punct fix, numit centru.*

*rază = radius (spiţă) – din limba latină*

**Cum desenăm un cerc:**

Cercul se desenează cu ajutorul compasului. Compasul este compus din două *braţe* îmbinate la un capăt. Unul dintre braţe are la capăt un ac, iar celălalt are un creion (sau un alt instrument de trasat). *Deschidem* compasul cu lungimea razei pe care o dorim – adică distanţa dintre ac şi vârful creionului să fie egală cu *r*. Fixăm acul compasului într-un punct $O$ şi cu vârful creionului pe hârtie imprimăm compasului o mişcare de *rotaţie* completă, fără ca în timpul mişcării compasul să se *deschidă* sau să se *închidă*. Vârful creionului va descrie figura geometrică numită *cerc*.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!




În figura alăturată este desenat un cerc cu centrul în $O$ și rază $r$.

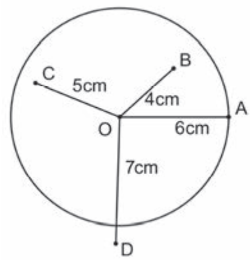
- Segmentele $OA$, $OB$, $OC$ sunt *raze* în cerc. Ele sunt segmente congruente. Şi segmentele $OM$ şi $ON$ sunt raze, chiar dacă nu sunt desenate.
- Un segment care uneşte două puncte de pe cerc se numeşte *coardă*. Segmentele $MN$ şi $AB$ sunt coarde ale cercului.
- O coardă ce conține centrul cercului se numeste *diametru*. Capetele diametrului se numesc puncte *diametral opuse*. Segmentul $AB$ este un diametru şi este format din două raze. Lungimea oricărui diametru este $2r$.
- Dacă două cercuri au raze egale, atunci ele se numesc *cercuri congruente*.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➢ Desenaţi $C(O,5\text{cm})$ şi punctele $A$, $M$, $N$, ştiind că: $OA=5\text{cm}$, $AM$ este coardă, dar nu diametru, $MN=10\text{cm}$ şi $N\in C(O,5\text{cm})$.

*Rezolvare*: $OA$ este o rază; $M$ este şi el pe cerc pentru că $AM$ este coardă; pentru că $M$ şi $N$ sunt pe cerc, înseamnă că $MN$ este coardă, iar pentru că $MN=10\text{cm}$ înseamnă că este diametru.

➢ Desenaţi un cerc cu centrul în punctul $O$ şi raza $r=6\text{cm}$ şi punctele $A$, $B$, $C$, $D$ astfel încât: $OA=6\text{cm}$, $OB=4\text{cm}$, $OC=5\text{cm}$ şi $OD=7\text{cm}$.



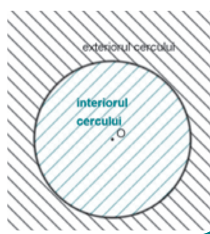

*Rezolvare:* $OA$ este egală cu raza cercului, deci punctul $A$ se află pe cerc;

- $OB<r$ şi $OC<r$, deci punctele $B$ şi $C$ sunt situate în *interiorul* cercului;
- $OD>r$, deci punctul $D$ este situat în *exteriorul* cercului.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fiind dat cercul $C(O,r)$:

- mulțimea punctelor $M$ din plan pentru care $OM<r$ formează *interiorul cercului* și se notează $IntC(O,r)$.
- mulțimea punctelor $N$ din plan pentru care $ON>r$ formează *exteriorul cercului* și se notează $ExtC(O,r)$.



# CUPRINS