colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Delia Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : olimpiade și concursuri școlare : clasele IX-XII : 2017-2018 /
Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, ... - Pitești : Paralela 45, 2018
ISBN 978-973-47-2830-5

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
GABRIELA-ROXANA BONDOC, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,
VLAD LUNGU, ELENA RÎMNICEANU,
DANIEL STRETCU, TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2017-2018

Editura Paralela 45

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

9.O.1. a) Demonstrați că $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, $\forall\ x, y \in (0, \infty)$.

b) Demonstrați că $3\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right) \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+4$, $\forall\ a, b \in (0, \infty)$.

9.O.2. a) Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$.

b) Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[BC]$. Demonstrați că $2\,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

9.O.3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $a_0 = 2$, $a_1 = 7$ și $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $a_n = 3^n + 4^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

9.O.4. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$ și H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3 ortocentrele triunghiurilor CDE, DEF, EFA, FAB, ABC, respectiv BCD. Demonstrați că dreptele H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3 sunt concurente.

Arad

9.O.5. Demonstrați că $(1 + x)^n + \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, $\forall\ x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$.

9.O.6. Fie $r \geq 0$. Pentru orice numere reale a și b definim mulțimea:

$$I(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| + |x - b| \leq r\}.$$

a) Dacă $r < |a - b|$, demonstrați că $I(a, b) = \varnothing$.

b) Dacă $r \geq |a - b| > 0$, demonstrați că $I(a, b)$ este un interval închis și mărginit, de lungime r.

9.O.7. În patrulaterul $ABCD$ o dreaptă d conține punctul O, de intersecție a diagonalelor AC și BD, și intersectează laturile (AB) și (CD) în punctele M și N. Demonstrați că: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$.

9.O.8. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ și $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, $n \geq 1$.

a) Arătați că $\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \cdot (3^n - 4n - 1)$.

b) Demonstrați că oricare doi termeni consecutivi ai șirului sunt numere întregi prime între ele.

Argeș

9.O.9. Determinați numerele naturale a, b mai mari decât 1, astfel încât numerele $a^2 + 16 \cdot \left[\frac{b}{2}\right]$ și $b^2 + 16 \cdot \left[\frac{a}{2}\right]$ să fie simultan pătrate perfecte, unde prin $[x]$ înțelegem partea întreagă a numărului real x.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

9.O.10. Fie numerele reale $a, b, c, d > 0$, astfel încât $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$. Arătați că:

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} + \frac{b^2+c^2}{d+a} + \frac{c^2+d^2}{a+b} + \frac{d^2+a^2}{b+c} \geq 4.$$

Când avem egalitate?

Ion Călinescu

9.O.11. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{CP}{PA} = x$ și $\frac{BN}{NC} = y$, unde $x, y \in (0, \infty)$. Demonstrați că, dacă centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MNP și ABC coincid, atunci vectorii $\overrightarrow{H_1H_2}$, $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari, unde H_1, H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv MNP.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

9.O.12. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și punctele M, N astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$. Demonstrați că punctele M, N, G sunt coliniare.

Marian Teler

Bihor

9.O.13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$;

b) $\{x\} + \frac{1}{\{x\}} = [x] + \frac{1}{[x]}$.

($\{x\}$ și $[x]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real x.)

clasa a X-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

10.O.1. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

a) $\log_{xy} yz + \log_{yz} xy \geq 2$;

b) $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \dfrac{3}{2}$.

10.O.2. Rezolvați ecuația $\sqrt{a^2 - x\sqrt{a^2 + x^2}} = a - x$, discutând după valorile lui $a \in \mathbb{R}$.

10.O.3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{2}{x^2} + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

a) Determinați funcția f.

b) Stabiliți dacă funcția f este bijectivă.

c) Calculați suma $S = \sum_{k=2}^{2018} \dfrac{1}{f(k) - 2}$.

10.O.4. Fie $u, v, z \in \mathbb{C}$, astfel încât $|u| < 1$, iar $|v| = 1$ și fie $w = v \cdot \dfrac{z - u}{1 - \overline{u} \cdot z}$. Arătați că $|w| \leq 1$ dacă și numai dacă $|z| \leq 1$.

Arad

10.O.5. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$ și $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Demonstrați că:

a) $|z| = 1$ și $z \neq 1$;

b) $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, z, z^2\}$.

10.O.6. Fie $a, b, c > 1$. Arătați că:

a) $\log_a (b \cdot c) + \log_b (c \cdot a) + \log_c (a \cdot b) \geq 6$;

b) $\log_a \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + \log_b \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + \log_c \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq 3$.

10.O.7. a) Calculați numărul real $x = \sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10} - \sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}+10}$.

b) Demonstrați că $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_5 2} \geq 3$.

10.O.8. a) Rezolvați ecuația $\left(\sqrt{5}+2\right)^x + \left(\sqrt{5}-2\right)^x = 18$.

b) Arătați că $\left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c} = 1$, unde $a, b, c > 0$.

Argeș

10.O.9. Arătați că, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ și $a > b + c$, atunci $a^{2017} \cdot (a-1) > b^{2017} \cdot (b-1) + c^{2017} \cdot (c-1)$.

Dragoș Petrică și Cosmin Manea

10.O.10. Fie $a > 1$. Rezolvați ecuația $\log_{\frac{a}{a^2+1}} \left(\frac{x}{a}\right) = \log_{\frac{2a}{a^2+1}} (2a - 2ax)$.

Marin Chirciu

10.O.11. Rezolvați ecuația $\frac{1}{a^x + b^{2x}} + \frac{1}{a^{2x} + b^x} + \frac{1}{(ab)^x + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{2x}} + \frac{1}{b^{2x}} + 1\right)$.

Marin Chirciu

10.O.12. Fie $a, b, c > 0$, astfel încât $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Arătați că:

$$n(a + b + c) + 1 \geq (12n + 8)abc, \text{ unde } n \geq 0.$$

Marin Chirciu

Bihor

10.O.13. Rezolvați sistemul $\begin{cases} |z-1-i| \leq \sqrt{2} \\ |z-3+i| = |z-1-i| \\ |z-3+i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$, unde $z \in \mathbb{C}$.

10.O.14. Considerăm mulțimea $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}^*$ $(n \geq 2)$, cu proprietatea că $a_i \cdot a_j \in M$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Arătați că $M = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

b) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$, unde $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ este funcția definită prin $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[n\cdot x]}$.

10.O.15. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

a) Arătați că funcția f este bijectivă și determinați inversa ei, f^{-1}.

b) Determinați soluțiile întregi ale ecuației $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

10.O.16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, unde $a, b > 1$.

Botoșani

10.O.17. Se consideră numerele a, b, c, d, astfel încât $a > c > b > 0$ și $ab = cd$. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a^x + b^x \geq c^x + d^x$.

10.O.18. Arătați că nu există funcții injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care, pentru orice număr real x, satisfac relația $f(3^x) + f(5^x) = 8$.

10.O.19. Determinați numerele $a, b, c > 0$ cu proprietatea că:

$$a^{\log_3 a} \cdot b + b^{\log_3 b} \cdot c + c^{\log_3 c} \cdot a = \sqrt[4]{27}.$$

10.O.20. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n(|z|^2 + 1)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

b) Arătați că, dacă $|z - z_1| \leq 1, |z - z_2| \leq 1, ..., |z - z_n| \leq 1$, atunci $z = 0$.

Brașov

10.O.21. Fie $a \in [0, \infty)$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, astfel încât $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$. Arătați că:

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2} \leq |z| \leq \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

10.O.22. Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P), dacă $f(x-1) + f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că, dacă f are proprietatea (P), atunci $f(x+6) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{x}{6} \right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este periodică, dar nu are proprietatea (P).

c) Dați exemplu de o funcție neconstantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are proprietatea (P).

Romeo Ilie

10.O.23. Fie $a > 1$ și $p, q \in \mathbb{N}^*$. Determinați toate numerele reale $x > 0$, care satisfac simultan relațiile $\left\{ \frac{\log_{a^p} x}{2} \right\} = \left\{ \frac{\log_{a^p} x}{3} \right\}$ și $\left\{ \frac{\log_{a^q} x}{2} \right\} = \left\{ \frac{\log_{a^q} x}{3} \right\}$, unde $\{t\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real t.

Ioana Mașca

CUPRINS