CAMELIA MEXI
GABRIEL VRÎNCEANU
LIDIA MĂINESCU
ANA ELISABETA NAGHI
LILIANA MARIA TODERIUC

CAIET DE VACANȚĂ

Matematică

CLASA A VI-A

CORINT
EDUCAŢIONAL

TEMA 1

Divizibilitatea numerelor naturale

În această temă ne vom aminti despre:
- ✓ *divizor și multiplu;*
- ✓ *proprietățile relației de divizibilitate;*
- ✓ *număr prim;*
- ✓ *număr compus.*

• **Divizor:** Fie a şi b numere naturale, cu $a \neq 0$. Spunem că ***a* este divizor al lui *b*** dacă există c număr natural astfel încât $b = a \cdot c$; notăm $a \mid b$.

• **Multiplu:** Fie a şi b numere naturale, cu $a \neq 0$. Spunem că ***b* este multiplu al lui *a*** dacă există c număr natural astfel încât $b = a \cdot c$; notăm $b \mid a$.

• **Proprietăţile relaţiei de divizibilitate:** Pentru orice numere naturale a, b şi c nenule, avem:
- ✓ $a \mid a$, $a \mid 0$ şi $1 \mid a$ pentru orice număr natural a nenul;
- ✓ $a \mid a \cdot b$ şi $b \mid a \cdot b$ pentru orice numere naturale a şi b nenule;
- ✓ $a \mid b$, $b \mid c$ şi $a \mid c$ pentru orice numere naturale a, b şi c nenule;
- ✓ $a \mid b$ şi $b \mid a$ implică $a = b$ pentru orice numere naturale a şi b nenule;
- ✓ $a \mid b$ şi $a \mid c$ implică $a \mid (b + c)$ şi $a \mid (b - c)$ pentru orice numere naturale a, b şi c nenule;
- ✓ $a \mid b$ implică $a \mid b \cdot c$ pentru orice numere naturale a, b şi c nenule.

• **Număr prim** este numărul natural nenul care are ca singuri divizori pe 1 şi pe el însuşi.

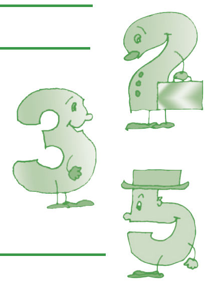
• **Număr compus** este numărul natural nenul care are şi alţi divizori în afară de 1 şi de el însuşi.

1. Folosind cifrele 2, 5 şi 8 o singură dată, scrieţi:

a) cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 2; ______________________

b) cel mai mare număr natural nenul divizibil cu 5; ______________________

c) cel mai mare număr natural nenul divizibil cu 3. ______________________



2. Scrieți numerele naturale nenule mai mici decât 31:

a) divizibile cu 2; c) divizibile cu 3; e) divizibile cu 2 şi cu 3.

b) divizibile cu 5; d) divizibile cu 2 sau 3;

____

____

____

____

____

3. Specificați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \mid 18 \cdot 105$; A F b) $3 \mid (6 \cdot 79 + 6 \cdot 143)$. A F

Justificați răspunsul dat.

____

4. Verificați dacă numerele 87, 91 şi 102 sunt numere prime sau compuse.

____

5. Scrieți numerele de forma:

a) $\overline{3x7x} \ \vdots\ 10$; ______

b) $\overline{3y7x} \ \vdots\ 10$; ______

c) $\overline{17x} \ \vdots\ 5$; ______

d) $\overline{1xy} \ \vdots\ 5$. ______

6. Descompuneți în factori primi şi aflați numărul de divizori ai numerelor: 18, 34, 190 şi 252.

______

______

______

______

7. Aflați două numere consecutive al căror produs este 3 422.

______

______

8. Aflați în câte zerouri se termină numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 50$.

______

______

9. Demonstrați că $\overline{abcabc} \ \vdots\ 1\,001$.

______

10. Demonstrați că numărul $b = 3^{80} - 2^{20}$ este divizibil cu 5.

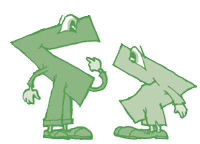
______

11. Demonstrați că dacă $3 \mid (2 \cdot a - b)$, atunci $3 \mid (5 \cdot a + 3 \cdot b)$.

______

______

12. Demonstrați că:



a) numărul $a = 1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2\,014}$ este divizibil cu 13;

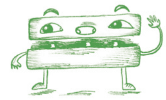
b) numărul $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 31$ este divizibil cu 10^6.

______

______

Să ne jucăm!

1. Curiozităţi matematice



Priviţi următoarele egalităţi:

$$6 = 1 + 2 + 3 \text{ şi } 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Fiecare număr este scris ca sumă a divizorilor săi, cu excepţia numărului însuşi. Astfel de numere se numesc **numere perfecte**; vechii greci le numeau **numere divine**. Până în prezent s-au găsit circa 30 de numere perfecte.

Noi v-am arătat două astfel de numere. Voi puteţi găsi încă unul?

2. O problemă recreativă

Scrieţi numărul 7 cu cifre romane, utilizând 4 beţişoare. Mutaţi apoi un singur beţişor astfel încât să obţineţi ca rezultat numărul unu.

Desenaţi aici!

TEMA 2

Divizor comun și multiplu comun al numerelor naturale

În această temă ne vom aminti despre:
- ✓ *divizorul comun al două sau mai multe numere naturale;*
- ✓ *multiplii comuni ai două sau mai multe numere naturale.*

Folosim următoarele notaţii:
- ✓ $\mathcal{D}_n$ – mulţimea divizorilor lui n, pentru orice n număr natural nenul;
- ✓ $\mathcal{M}_n$ – mulţimea multiplilor lui n, pentru orice n număr natural nenul;
- ✓ $[a; b]$ – cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale nenule a şi b (prescurtat c.m.m.m.c.);
- ✓ $(a; b)$ – cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule a şi b (prescurtat c.m.m.d.c.).

1. Dacă $\mathcal{D}_a = \{n \in \mathbb{N}^* / n \;/\; a\}$, aflaţi $\mathcal{D}_{12}$, $\mathcal{D}_{18}$ şi $\mathcal{D}_{12} \cap \mathcal{D}_{18}$. Care este cel mai mare divizor comun al numerelor date?

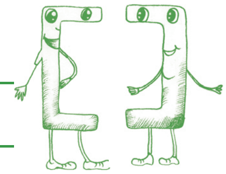
2. Aflați elementele mulțimilor $\mathcal{D}_{16}$, $\mathcal{D}_{24}$ și $\mathcal{D}_{32}$, apoi aflați cel mai mare element al mulțimii $\mathcal{D}_{16} \cap \mathcal{D}_{24} \cap \mathcal{D}_{32}$.

3. Dacă $\mathcal{M}_a = \{n \in \mathbb{N}^* / n \;\vdots\; a\}$, aflați $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ şi $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$.

4. Trasați câte o săgeată de la fiecare număr din coloana din stânga către multiplul său aflat în coloana din dreapta.

2	21
5	2
7	22

5. Aflați $[100; 250; 125]$ şi $(100; 250; 125)$.



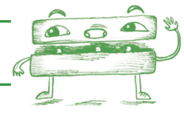
6. Maria citește în fiecare zi 20 de pagini dintr-o carte, iar Ioana citește 16 pagini în fiecare zi. Care este numărul minim de zile care îi sunt necesare Ioanei pentru a citi același număr de pagini ca Maria?

7. Dacă $a + b = 138$, iar $(a; b) = 23$, aflați a şi b.

8. Dacă $a \cdot b = 120$ şi $[a; b] = 60$, aflați a şi b.

9. Demonstrați că oricare două numere naturale consecutive sunt prime între ele.

10. Demonstrați că pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, numerele $a = 4n + 5$ şi $b = 3n + 4$ sunt prime între ele.



11. În expresia $a = 3 + 3 \cdot 3 + 1$, puneți o singură liniuță astfel încât, efectuând calculele, să obţineţi un număr de 4 cifre divizibil cu 10.

Să ne jucăm!

Curiozităţi matematice

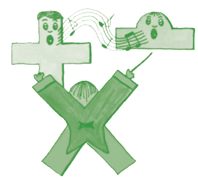
Urmăriţi înmulţirile de mai jos cu cifra 1 şi produse ale numerelor naturale scrise doar cu cifra 1. Verificaţi calculele.

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$11 \cdot 11 = 121$$

$$111 \cdot 111 = 12321$$

$$1111 \cdot 1111 = 1234321$$



$$11111 \cdot 11111 = 123454321$$

$$111111 \cdot 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \cdot 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$$

TEMA 3

Fracţii; fracţii echivalente

În această temă ne vom aminti despre:
- ✓ *noţiunea de fracţie;*
- ✓ *fracţii echivalente;*
- ✓ *metode de obţinere a fracţiilor echivalente.*

Pentru a, b, c şi d numere reale, $b \neq 0$ şi $d \neq 0$, avem:

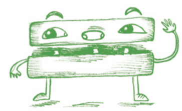
✓ Fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, se numesc **fracţii echivalente** dacă $a \cdot d = b \cdot c$; scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

✓ Amplificarea unei fracţii $\frac{a}{b}$, cu un număr natural nenul m: ${}^{m)}\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$.

✓ Simplificarea unei fracţii $\frac{a}{b}$, cu un număr natural nenul m: $\frac{a}{b}^{(m} = \frac{a : m}{b : m}$.

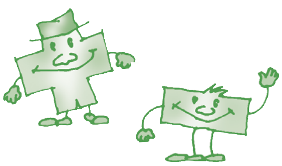
1. Verificaţi dacă sunt echivalente următoarele perechi de fracţii:

a) $\frac{3}{5}$ şi $\frac{6}{10}$; b) $\frac{4}{6}$ şi $\frac{8}{18}$.



2. Scrieţi fracţii echivalente, folosind numerele:

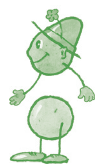
a) 14; 7; 18; 9; b) 75; 27; 25; 9.



3. Pornind de la fracţia $\frac{5}{7}$, obţineţi încă două fracţii echivalente prin amplificare.

4. Folosind simplificarea, obţineţi două fracţii echivalente cu:

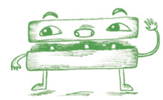
a) $\frac{36}{90}$; b) $\frac{196}{210}$.



5. Verificaţi dacă sunt adevărate echivalenţele:

a) $\dfrac{0{,}42}{3{,}5} = \dfrac{0{,}6}{5}$; b) $\dfrac{1\frac{1}{3}}{0{,}(5)} = \dfrac{0{,}9}{\frac{3}{8}}$.

6. Formaţi două fracţii echivalente cu numerele: 0,(12); $\dfrac{1}{5}$; 9,9 şi 6.



7. Dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, demonstraţi că $\dfrac{a \cdot n}{b} = \dfrac{c \cdot n}{d}$, oricare ar fi numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Amplificaţi: a) cu 5^7 fracţia $\dfrac{5^4}{2^7}$; b) cu 3^n fracţia $\dfrac{2^n}{5^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Simplificaţi fracţiile: a) $\dfrac{2^{34} \cdot 3^{15}}{2^{35} \cdot 3^{14}}$; b) $\dfrac{2^{n+2} \cdot 3^n}{6^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$; c) $\dfrac{a \cdot n + b \cdot n}{c \cdot n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Simplificaţi $\dfrac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^n + 35 \cdot 3^n \cdot 5^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să ne jucăm!

Curiozităţi cu numere raţionale

În vederea participării la olimpiada de matematică, profesorul a propus elevilor săi să verifice următoarele egalităţi:

$$\frac{23}{41} = \frac{253}{451} = \frac{2\,553}{4\,551} = \frac{25\,553}{45\,551} = \frac{255\,553}{455\,551}.$$

Ionel, un elev al clasei a 6-a, a rezolvat problema astfel:

$$\frac{23}{41} = \frac{2\cancel{5}3}{4\cancel{5}1} = \frac{2\,\cancel{55}3}{4\,\cancel{55}1} = \frac{2\cancel{5\,55}3}{4\cancel{5\,55}1} = \frac{2\cancel{55\,55}3}{4\cancel{55\,55}1}$$

Este corect? Argumentaţi răspunsul.

CUPRINS

Cuvânt-înainte *3*
Tema 1 – Divizibilitatea numerelor naturale 4
Tema 2 – Divizor comun şi multiplu comun al numerelor naturale 7
Tema 3 – Fracţii; fracţii echivalente 10
Tema 4 – Operaţii cu numere naturale pozitive; medii 13
Tema 5 – Ecuaţii cu numere raţionale pozitive 16
Tema 6 – Rapoarte şi proporţii; proporţii derivate 19
Tema 7 – Procente 22
Tema 8 – Mărimi direct proporţionale; regula de trei simplă 25
Tema 9 – Mărimi invers proporţionale; regula de trei simplă 28
Tema 10 – Modulul şi opusul unui număr întreg; compararea întregilor 31
Tema 11 – Operaţii cu numere întregi 34
Tema 12 – Ecuaţii şi inecuaţii în mulţimea numerelor întregi 37
Tema 13 – Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment 40
Tema 14 – Segmente; simetria unui punct faţă de alt punct 43
Tema 15 – Unghiuri, bisectoarea unui unghi, măsuri de unghiuri 46
Tema 16 – Tipuri de unghiuri 49
Tema 17 – Triunghiuri: tipuri, proprietăţi şi construcţii 52
Tema 18 – Congruenţa triunghiurilor 55
Tema 19 – Congruenţa triunghiurilor dreptunghice 58
Tema 20 – Metoda triunghiurilor congruente 61
Tema 21 – Perpendicularitate; distanţa de la un punct la o dreaptă 64
Tema 22 – Mediatoarea unui segment; simetria faţă de o dreaptă 67
Tema 23 – Bisectoarele unghiurilor unui triunghi 70
Tema 24 – Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior 73
Tema 25 – Mediana într-un triunghi; centrul de greutate al unui triunghi 76
Tema 26 – Triunghiul isoscel – proprietăţi 79
Tema 27 – Triunghiul echilateral – proprietăţi 82
Tema 28 – Triunghiul dreptunghic – proprietăţi 85
Tema 29 – Paralelism şi criterii de paralelism 88
Evaluare – Modele de teste de evaluare 91
Răspunsuri *94*