BREVIAR TEORETIC

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

I. MULŢIMI (M)

M.1 MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

● **MULŢIMI**

■ **Mulţimea** este o noţiune primară care se descrie ca o grupare de obiecte, fenomene, simboluri etc., numite *elementele* mulţimii.

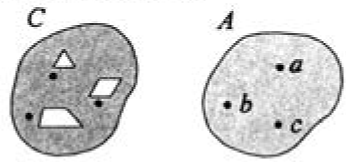
■ **Notaţii.** ◇ *Mulţimile* se notează cu litere mari: A, B, ..., M, N, ...
◇ *Elementele* se notează cu: litere mici, numere sau cu alte simboluri scrise între acolade. Într-o mulţime un element se scrie o singură dată.

■ **Prezentarea** mulţimilor se face prin:

◇ enumerarea elementelor între acolade:
$A = \{a; b; c\}$; $B = \{2; 4; 6; 8\}$; $C = \{\triangle; \square; ⏢\}$; $D = \{e; l; v\}$.

◇ formularea unei proprietăţi comune numai elementelor acelei mulţimi.
$B = \{y \mid y$ este număr natural nenul mai mic decât $10\}$
$D = \{t \mid t$ este literă în cuvântul „elevele“$\}$.

◇ diagrame Venn–Euler



■ **Clasificare:**

◇ *mulţimea vidă* – notată „$\varnothing$“ este mulţimea care nu are nici un element.

◇ *mulţimi finite* – au un număr finit de elemente. De exemplu, mulţimea elevilor dintr-o clasă.

◇ *mulţimi infinite* – au un număr infinit de elemente. De exemplu, mulţimile numerice.

Atenţie. Scrierea: $\{\varnothing\}$ înseamnă mulţime cu un element notat cu simbolul mulţimii vide.

■ **Relaţii:**

◇ între ***un element*** şi ***o mulţime***:

— *Apartenenţa* ($\in$; $\notin$), indică dacă un element se află sau nu în mulţimea respectivă. De exemplu $b \in A$, $f \notin A$.

◇ ***între două mulţimi:***

— *Incluziunea* ($\subset$; $\not\subset$). O mulţime A este *inclusă* într-o altă mulţime B dacă *orice* element al mulţimii A este element al mulţimii B.

$\boxed{A \subset B,\ (\forall) x \in A \Rightarrow x \in B}$.

Dacă $A \subset B$, atunci A se numeşte *submulţime* (parte) a mulţimii B.

— *Egalitatea* ($=$). Două mulţimi se numesc *egale* dacă conţin aceleaşi elemente.

$\boxed{A = B \text{ dacă } A \subset B \text{ şi } B \subset A}$

● OPERAŢII CU MULŢIMI

1. Reuniunea ($\cup$) a două sau mai multe mulţimi este tot o mulţime formată din toate elementele mulţimilor (elementele comune se iau o singură dată).

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ sau } x \in B\}}$$

2. Intersecţia ($\cap$) a două sau mai multe mulţimi este tot o mulţime formată numai din elementele comune tuturor mulţimilor.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \textbf{ şi } x \in B\}.}$$

Observaţie. Dacă $A \cap B = \varnothing$, mulţimile A şi B se numesc *mulţimi disjuncte*.

3. Diferenţa ($\setminus$ sau $-$) a două mulţimi este mulţimea formată din elementele care aparţin mulţimii „descăzut" şi nu aparţin mulţimii „scăzător".

$$\boxed{A \setminus B = \{x \mid x \in A \textbf{ şi } x \notin B\};\ B \setminus A = \{x \mid x \in B \textbf{ şi } x \notin A\}}$$

De reţinut: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \overset{not}{=} A \vartriangle B$ se numeşte *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B.

4) **Produsul cartezian** ($\times$) a două mulţimi este mulţimea formată din toate *perechile ordonate* de elemente astfel încât primul element al perechii să fie din mulţimea „deînmulţit" iar al doilea element al perechii să fie din mulţimea „înmulţitor".

$$\boxed{A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A \text{ şi } y \in B\}}$$

Exemple

$A = \{1;\ 2;\ 3\};\ B = \{2;\ 3;\ 5;\ 6\};\ C = \{3;\ 5\};\ D = \{5;\ 3\} \Rightarrow$

1° $2 \in A;\ 5 \notin A.$
2° $C \subset B;\ A \not\subset B$ pentru că $1 \in A$ dar $1 \notin B$.
3° $C = D.$
4° $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6\}.$
5° $A \cap B = \{2;\ 3\};\ A \cap B \cap C = \{3\}.$
6° $A \setminus B = \{1\};\ B \setminus A = \{5;\ 6\} \Rightarrow A \vartriangle B = \{1;\ 5;\ 6\}.$
7° $A \times C = \{(1;\ 3);\ (1;\ 5);\ (2;\ 3);\ (2;\ 5);\ (3;\ 3);\ (3;\ 5)\}.$

M.2 MULŢIMILE $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

▪ MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n;\ \dots\};\quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

De reţinut: $(\forall)\ a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ 1° $a + b = s \in \mathbb{N}$; 2° $a \cdot b = p \in \mathbb{N}$;

3° $a^n \in \mathbb{N}$; $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, 4° $a - b = d \in \mathbb{N}$ numai dacă $a \geq b$;

5° $a : b = c \in \mathbb{N}$ numai dacă $a = \mathcal{M}_b$; $b \neq 0$ sau $a \ \vdots\ b$

- **MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI** ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{...,-n; ...-2;-1; 0; 1; 2; ...; n; ...\}$;

$\mathbb{Z}_- = \{...;-n; ...-2;-1\}$ = mulţimea numerelor întregi negative;

$\mathbb{Z}_+ = \{1; 2; ...; n; ...\}$ = mulţimea numerelor întregi pozitive;

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$; $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

➡ ***De reţinut:*** $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ 1° $a + b = s \in \mathbb{Z}$; 2° $a - b = d \in \mathbb{Z}$;

3° $a \cdot b = p \in \mathbb{Z}$; 4° $a^n \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$; 5° $a : n = c \in \mathbb{Z}$, numai dacă $a = \mathcal{M}_b$; $b \neq 0$.

- **MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE** ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}; \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}.$$

➡ ***De reţinut:*** $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ 1° $a + b = s \in \mathbb{Q}$; 2° $a - b = d \in \mathbb{Q}$;

3° $a \cdot b = p \in \mathbb{Q}$; 4° $a^n \in \mathbb{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$;

5° $a : b = c \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0 \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $(\forall)\ a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \dfrac{a \cdot n}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}^*$.

- **MULŢIMEA NUMERELOR REALE** ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Există numere reale care nu sunt naturale, întregi sau raţionale.

Aceste numere se numesc ***numere iraţionale*** ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Exemplu $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ şi, în general, $\sqrt{n}$, dacă $n \neq k^2$; $k \in \mathbb{Q}$ (adică n nu este pătratul unui număr raţional k).

Alte numere iraţionale sunt: π ($\pi \approx 3{,}1415...$) şi e ($e \approx 2{,}72...$).

Observaţie. Numerele iraţionale nu se pot scrie sub formă de numere raţionale şi dacă se scriu zecimal, au o infinitate de cifre care nu se repetă periodic.

M.3 SCRIEREA NUMERELOR NATURALE ÎN BAZA ZECE

La scrierea numerelor naturale în baza zece se folosesc cifrele:
0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

$\overline{ab} = a \cdot 10 + b$; $a, b-$cifre, $a \neq 0$

$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$; $a, b, c-$cifre, $a \neq 0$

$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$; $a, b, c, d-$cifre, $a \neq 0$

în general

$$\underbrace{\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0}}_{\text{număr format din } (n+1) \text{ cifre}} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0;$$

unde $a_n, a_{n-1}, ...\ a_2, a_1, a_0$ sunt cifre şi $a_n \neq 0$.
De exemplu: $3275 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$

M.4 PROPOZIŢII ADEVĂRATE ŞI PROPOZIŢII FALSE

În logică prin *propoziţie* înţelegem un enunţ care poate fi adevărat sau fals.

Atenţie! Nu sunt considerate propoziţii logice definiţiile, precum şi propoziţiile interogative sau exclamative ale limbii.

Exemple 1. „$5+2=7$"; „$3>11$"; „Astăzi este joi", sunt exemple de propoziţii logice.

2. „Ce notă ai luat la teză?"; „Mergi afară!"; „Se numeşte număr prim numărul natural mai mare decât 1 care are ca divizori numai pe 1 şi pe el însuşi", sunt exemple de enunţuri care nu sunt propoziţii logice.

Oricărei propoziţii i se asociază o *valoare de adevăr*. Dacă o *propoziţie este adevărată*, spunem că are valoarea de adevăr A (sau 1), iar dacă este o *propoziţie falsă* spunem că are valoarea de adevăr F (sau 0).

Exemplu 1. Valoarea de adevăr a propoziţiei „$2^3=8$" este (A) (deoarece „$8=8$" este un enunţ adevărat), iar propoziţia „$(-3)^3>33$" are valoarea de adevăr (F) (deoarece enunţul „$-27>33$" este o afirmaţie falsă).

2. Fie numărul $a=\sqrt{133+2+4+6+...+264}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor: 1° $a\in\mathbb{Z}$; 2° $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; 3° $a\in\mathbb{Q}$; 4° $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

Rezolvare. ► $a=\sqrt{133+2(1+2+3+...+132)}=\sqrt{133+2\cdot\dfrac{132\cdot133}{2}}=$

$$=\sqrt{133+132\cdot133}=\sqrt{133(1+132)}=\sqrt{133^2}=133.$$

1° $133\in\mathbb{Z}$ (A); 2° $133\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (F); 3° $133\in\mathbb{Q}$ (A); 4° $133\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$ (F). ◄

M.5 ÎMPĂRŢIREA CU REST A NUMERELOR NATURALE. DIVIZIBILITATEA ÎN $\mathbb{N}$

Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b\neq0$, există numerele naturale c şi r astfel încât $a=b\cdot c+r$, unde $0\leq r<b$.
(d = deîmpărţit; b = împărţitor; c = cât; r = rest)

Observaţie. Relaţia: $a=b\cdot c+r$; $0\leq r<b$ este cunoscută sub denumirea „teorema împărţirii cu rest" sau „proba împărţirii".

Exemplu La împărţirea numărului a la 4 avem: $a=4\cdot c+r$ cu $r\in\{0;1;2;3\}$; $a=27$; $b=4\Rightarrow27=4\cdot6+3$, deci $c=6$; $r=3$.

Observaţie. Dacă $r=0\Rightarrow a=b\cdot c$ (împărţirea este exactă).

● DIVIZIBILITATEA ÎN $\mathbb{N}$

Un număr natural a este *divizibil* cu alt număr natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Scriem „$a \,\vdots\, b$" sau „$b \mid a$" şi citim „a este *divizibil* cu b" sau „b *divide* pe a".

Dacă $a = b \cdot c$ citim „a este multiplul lui b"; „b este divizorul lui a".

Exemplu $15 \,\vdots\, 3$ sau $3 \mid 15$ pentru că $15 = 3 \cdot 5$.

Dacă $a \in \mathbb{N}$ se notează:

$\mathcal{D}_a$ – mulţimea divizorilor numărului a; $\mathcal{D}_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

$\mathcal{M}_a$ – mulţimea multiplilor numărului a; $\mathcal{M}_{12} = \{0, 12; 24; ...; 12n; ...\}$

■ Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate. Exemple

D_1 Orice număr natural este divizibil cu 1.

$\boxed{a \,\vdots\, 1;\ (\forall) a \in \mathbb{N}}$

D_2 0 este divizibil cu orice număr natural.

$\boxed{0 \,\vdots\, a;\ (\forall) a \in \mathbb{N}}$ $0 \,\vdots\, 25$ pentru că $0 = 25 \cdot 0$.

D_3 Orice număr natural se divide cu el însuşi.

$\boxed{a \,\vdots\, a;\ (\forall) a \in \mathbb{N}}$ (reflexivitatea) $0 \,\vdots\, 0$ pentru că $0 = 0 \cdot n$; $7 \,\vdots\, 7$ deoarece $7 = 7 \cdot 1$.

D_4 Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Dacă a este divizibil cu b şi b este divizibil cu a atunci $a = b$.

$\boxed{\text{Dacă } a \,\vdots\, b \text{ şi } b \,\vdots\, a \Rightarrow a = b}$ (antisimetria)

D_5 Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dacă b este divizibil cu a şi c este divizibil cu b, atunci c este divizibil cu a.

$\boxed{\text{Dacă } b \,\vdots\, a \text{ şi } c \,\vdots\, b \Rightarrow c \,\vdots\, a}$ (tranzitivitatea) $15 \,\vdots\, 3$ şi $45 \,\vdots\, 15 \Rightarrow 45 \,\vdots\, 3$.

D_6 Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$. Dacă a şi b sunt divizibile cu numărul d atunci şi suma (diferenţa) celor două numere este divizibilă cu d.

$$\boxed{\text{Dacă } \left.\begin{array}{l} a \,\vdots\, d \\ b \,\vdots\, d \end{array}\right| \Rightarrow (a \pm b) \,\vdots\, d} \qquad \left.\begin{array}{l} 48 \,\vdots\, 6 \\ 12 \,\vdots\, 6 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (48 + 12) \,\vdots\, 6 \\ (48 - 12) \,\vdots\, 6 \end{array}$$

D_7 Dacă un număr a este divizibil cu d atunci orice multiplu al lui a se divide cu d.

$\boxed{a \,\vdots\, d \Rightarrow (n \cdot a) \,\vdots\, d \quad (\forall) a, n \in \mathbb{N}}$ $12 \,\vdots\, 3 \Rightarrow (12 \cdot 5) \,\vdots\, 3$

D_8 Dacă numărul natural a se divide cu d, atunci orice putere nenulă a numărului a se divide cu d.

$\boxed{a \,\vdots\, d \Rightarrow a^n \,\vdots\, d \quad (\forall) a \in \mathbb{N} \text{ şi } n \in \mathbb{N}^*}$ $6 \,\vdots\, 3 \Rightarrow 6^4 \,\vdots\, 3$ $(1296 \,\vdots\, 3)$

D_9 Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$. Dacă numerele a şi b sunt divizibile cu d atunci şi suma (diferenţa) multiplilor lor este divizibilă cu d.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \,\vdots\, d \\ b \,\vdots\, d \end{array}\right| \Rightarrow (m \cdot a \pm p \cdot b) \,\vdots\, d;\ (\forall)\ a, b, m, p \in \mathbb{N}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 25 \,\vdots\, 5 \\ 15 \,\vdots\, 5 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (7 \cdot 25 + 3 \cdot 15) \,\vdots\, 5 \\ (7 \cdot 25 - 3 \cdot 15) \,\vdots\, 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 220 \,\vdots\, 5 \\ 130 \,\vdots\, 5 \end{array}$$

D_{10} Dacă un număr natural este divizibil cu două numere prime între ele atunci acel număr este divizibil cu produsul lor.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} a \vdots b \\ a \vdots c \\ (b;c)=1 \end{array}\right| \Rightarrow a \vdots (bc),\ (\forall)\, a,b,c \in \mathbb{N}} \qquad \left.\begin{array}{r} 18 \vdots 2 \\ 18 \vdots 3 \\ (2;3)=1 \end{array}\right| \Rightarrow 18 \vdots (2\cdot 3)$$

D_{11} Dacă *a, b* sunt numere naturale prime între ele şi *a* divide produsul dintre *b* şi un alt număr *c* atunci *a* divide pe *c*.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} (a;b)=1 \\ (b\cdot c) \vdots a \end{array}\right| \Rightarrow c \vdots a} \text{ (Teorema lui Gauss) } \quad \left.\begin{array}{r} (6\cdot 5) \vdots 2 \\ (5;2)=1 \end{array}\right| \Rightarrow 6 \vdots 2$$

■ **Criteriile de divizibilitate** sunt reguli care ne ajută să stabilim rapid dacă un număr este divizibil cu un alt număr.

Observaţii.

1° Pentru a reţine mai uşor criteriile de divizibilitate propunem următoarea clasificare a acestora:

a) Criterii care se referă la *ultima cifră* a numărului (divizibilitatea cu 2; 5; 10).

b) Criterii care se referă la *numărul format din ultimele două cifre* ale numărului (cu 4; 25; 100).

c) Criterii care se referă la *suma cifrelor* din care este format numărul (cu 3; 9).

2° În enunţarea criteriilor vom folosi notaţia $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ pentru un număr format din $(n+1)$ cifre, deci $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sunt cifre şi $a_n \neq 0$.

a) Un număr natural este ***divizibil cu* 2** dacă şi numai dacă *ultima cifră* a numărului este pară.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}}$ 776 $\vdots$ 2; 1998 $\vdots$ 2

Un număr natural este ***divizibil cu* 5** dacă şi numai dacă *ultima cifră* a numărului este 0 sau 5.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}}$ 375 $\vdots$ 5; 1230 $\vdots$ 5

Un număr natural este ***divizibil cu* 10** dacă şi numai dacă *ultima cifră* a numărului este 0.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 10 \Leftrightarrow a_0 = 0}$ 530 $\vdots$ 10

b)* Un număr natural se ***divide cu* 4** dacă şi numai dacă *numărul* format din *ultimele două* cifre ale numărului dat se divide cu 4.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4}$

712 $\vdots$ 4 pentru că 12 $\vdots$ 4, dar 234 $\not\vdots$ 4 deoarece 34 $\not\vdots$ 4.

* facultativ

Un număr natural este ***divizibil cu 25*** dacă şi numai dacă *numărul format din ultimele două* cifre ale numărului dat este divizibil cu 25.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \ \vdots\ 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00; 25; 50; 75\}}$ 1 375 ⋮ 25; 813 450 ⋮ 25.

Un număr natural ***este divizibil cu 100*** dacă şi numai dacă are ultimele două cifre 0.

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \ \vdots\ 100 \Leftrightarrow a_1 = a_0 = 0}$ 13 700 ⋮ 100.

c) Un număr natural este ***divizibil cu 3*** dacă şi numai dacă suma cifrelor sale se divide cu 3 (este multiplu de 3).

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \ \vdots\ 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0) \ \vdots\ 3}$

321 ⋮ 3 pentru că $3 + 2 + 1 = 6 \ \vdots\ 3$ şi 372 ⋮ 3 deoarece $3 + 7 + 2 = 12 \ \vdots\ 3$

Un număr natural este ***divizibil cu 9*** dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este multiplu de 9.*

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \ \vdots\ 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0) \ \vdots\ 9}$

162 ⋮ 9, deoarece $1 + 6 + 2 = 9 \ \vdots\ 9$ şi 891 ⋮ 9, deoarece $8 + 9 + 1 = 18 \ \vdots\ 9$ sau $18 = \mathcal{M}_9$

■ Numere prime, numere compuse, numere pare, numere impare

◇ Numărul natural a este *număr prim* dacă

$$\boxed{\mathcal{D}_a = \{1; a\}, (\forall)\ a \in \mathbb{N};\ a \geq 2.}$$

➡ Este bine să reţinem numerele prime mai mici decât 100:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

◇ Un număr natural care are cel puţin 3 divizori se numeşte *număr compus*.

De exemplu: $\mathcal{D}_4 = \{1; 2; 4\} \Rightarrow 4$ este număr compus.

$\mathcal{D}_6 = \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow 6$ este număr compus.

◇ Mulţimea *numerelor pare*, se notează:

$$\boxed{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0; 2; 4; 6; \ldots; 2n; \ldots\}}$$

◇ Mulţimea *numerelor impare*, se notează:

$$\boxed{\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1; 3; 5; 7; \ldots; 2n+1; \ldots\}}$$

* facultativ

◇ Dacă $x \in \mathbb{R}$, numărul real notat „$-x$“ se numeşte *opusul* lui x.

Exemple „-3“ este opusul lui „3“;

„$5\frac{1}{2}$“ este opusul lui „$-5\frac{1}{2}$“.

◇ Dacă $x \in \mathbb{R}^*$, numărul real „$\frac{1}{x} = x^{-1}$“ se numeşte *inversul* lui x.

Exemple „$\frac{2}{3}$“ este inversul lui „$\frac{3}{2}$“;

„5“ este inversul lui „$\frac{1}{5}$“.

◇ Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real x se numeşte partea întreagă a numărului x şi se notează $[x]$.

$$\boxed{\text{Dacă } x \in R \Rightarrow [x] \in \mathbb{Z} \text{ şi } [x] \le x < [x]+1}$$

Exemple $[2{,}35]=2$; $[-2{,}35]=-3$;

$\left[\frac{7}{3}\right]=2$; $\left[-\frac{7}{3}\right]=-3$; $[\sqrt{3}]=1$.

◇ Se numeşte *parte fracţionară* a unui număr real x diferenţa dintre numărul x şi partea sa întreagă. Se notează $\{x\}$.

$$\boxed{\text{Dacă } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x\}=x-[x] \text{ şi } 0 \le \{x\} < 1}$$

Observaţie. Dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\}=0$

Exemple $\{2{,}35\}=2{,}35-[2{,}35]=2{,}35-2=0{,}35$

$\{-2{,}35\}=-2{,}35-[-2{,}35]=-2{,}35-(-3)=-2{,}35+3=0{,}65$

$\left\{\frac{7}{3}\right\}=\frac{7}{3}-\left[\frac{7}{3}\right]=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

$\left\{-\frac{7}{3}\right\}=-\frac{7}{3}-\left[-\frac{7}{3}\right]=-\frac{7}{3}-(-3)=-\frac{7}{3}+3=\frac{2}{3}$

◇ În calculele cu numere reale (în special iraţionale) se folosesc *aproximări* ale numerelor respective pentru a uşura operaţiile.

a) *aproximările prin lipsă* se fac prin înlăturarea succesivă a cifrelor de la partea zecimală.

Exemple

• Dacă $x=2,35472...$, atunci 2; 2,3; 2,35; 2,354, ... sunt aproximări zecimale prin lipsă.

• Pentru $x=2,35472...$ scriem $x\approx 2,354$ aproximarea sa prin lipsă.

• Dacă $x=-3,1235...$, atunci -4; $-3,2$; $-3,23$; $-3,124$ sunt aproximări prin lipsă ale numărului $x=-3,1235...$.

b) *aproximările prin adaos* se obţin adăugând la ultima cifră a unei aproximări prin lipsă o unitate.

Exemple

• Dacă $x=2,35472...$, atunci 3; 2,4; 2,36; 2,355; ... sunt aproximări prin adaos şi scriem $x\approx 2,36$ pentru o aproximare de $\frac{1}{100}$ prin adaos.

• Dacă $x=-3,1235...$, atunci -3; $-3,1$; $-3,12$; $-3,123$; ... sunt aproximări prin adaos ale numărului $x=-3,1235...$.

◇ *rotunjiri* (la o anumită zecimală).

a) *ultima zecimală* la care se face rotunjirea *rămâne neschimbată* dacă ea este urmată de una dintre cifrele 0; 1; 2; 3; sau 4.

Exemple

$\pi = 3,141592653...$;

$\pi \approx 3,1$, rotunjire la prima zecimală;

$\pi = 3,14159$, rotunjire la a cincea zecimală.

b) *ultima zecimală* la care se face rotunjirea *se măreşte cu o unitate* dacă după ea urmează una dintre cifrele 5, 6, 7, 8 sau 9.

Exemple

$\pi = 3,141592653...$;

$\pi \approx 3,142$, rotunjire la a treia zecimală;

$\pi = 3,141593$, rotunjire la a şasea zecimală.

Observaţii.

1° Numărul „1“ nu este nici număr prim şi nici număr compus.

2° Pentru a stabili dacă un număr natural este prim se împarte pe rând numărul dat la numerele prime (luate în ordine crescătoare şi folosind criteriile de divizibilitate), până se obţine un cât mai mic sau egal cu împărţitorul. Dacă nu se divide cu nici unul dintre numerele prime respective atunci numărul dat este prim.

Exemplu

Studiem dacă numărul 41 este prim sau nu.

$41 \not\vdots\, 2$; $41 \not\vdots\, 3$; $41 \not\vdots\, 5$ şi $7^2=49>41 \Rightarrow 41$ este număr prim.

◇ Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de numere prime sau ca produs de puteri de numere prime. Această scriere se numeşte *descompunere în factori primi*. De exemplu: $6 = 2 \cdot 3$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$ şi util de reţinut $\boxed{1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13}$

◇ Dacă $x \in \mathbb{N}^*$ este număr compus şi $x = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{e_n}$, unde $a_1; a_2; \ldots; a_n$ sunt numere prime, iar exponenţii $e_1; e_2; \ldots; e_n \in \mathbb{N}^*$, notăm $n_{\mathcal{D}_x}$ numărul divizorilor lui x şi avem $\boxed{n_{\mathcal{D}_x} = (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_n + 1)}$*

De exemplu: $20 = 2^2 \cdot 5 \Rightarrow n_{\mathcal{D}_{20}} = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$

$x = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4 \Rightarrow n_{\mathcal{D}_x} = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (4 + 1) = 30.$

■ **Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c)**

Fiind date două sau mai multe numere naturale determinăm c.m.m.d.c. astfel:
– descompunem numerele în produse de factori primi;
– luăm **numai** *factorii comuni* (o singură dată) *la exponentul cel mai mic* şi îi înmulţim.

Exemplu

1° $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$
c.m.m.d.c. $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$
sau $(360; 756) = 36$

2° $a = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$
$c = 2 \cdot 7^3 \cdot 11$
c.m.m.d.c. $= 2 \cdot 7 = 14$
sau $(a; b; c) = 14$

Observaţie. Dacă $(a; b) = d \Rightarrow a \,\vdots\, d$ şi $b \,\vdots\, d \Rightarrow a = dx$; $b = dy$; $(x; y) = 1$.

■ **Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)**

Pentru aflarea c.m.m.m.c. se procedează astfel:
– se descompun numerele în produse de factori primi;
– se iau **toţi** factorii *comuni sau necomuni* (o singură dată) *la exponenţii cei mai mari* şi se înmulţesc.

Exemplu

1° $24 = 2^3 \cdot 3$
$45 = 3^2 \cdot 5$
c.m.m.m.c. $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
sau $[24; 45] = 360$

2° $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
$c = 2 \cdot 5$
c.m.m.m.c $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$
sau $[a; b; c] = 2520$

Observaţii.

1° Dacă $[a; b; c; \ldots] = m \Rightarrow m \,\vdots\, a$; $m \,\vdots\, b$; $m \,\vdots\, c, \ldots$

2° Dacă $a; b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$ – adică produsul dintre c.m.m.d.c. al numerelor a şi b şi c.m.m.m.c al lor este egal cu produsul numerelor.

Exemplu

$12 = 2^2 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3^2$
$(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$
$[12; 18] = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

$\Rightarrow (12; 18) \cdot [12; 18] = 12 \cdot 18$
$6 \cdot 36 = 216$

* facultativ

◇ *Numerele naturale a* şi *b* sunt ***prime între ele*** dacă şi numai dacă c.m.m.d.c. al lor este egal cu 1.

a; b sunt numere prime între ele $\Leftrightarrow (a; b) = 1$

De exemplu: $(2; 3) = 1 \Rightarrow$ 2 şi 3 prime între ele şi $(16; 25) = 1 \Rightarrow$ 16 şi 25 sunt prime între ele.

M.6 DIVIZORII UNUI NUMĂR ÎNTREG

Numărul $a \in \mathbb{Z}$ este *număr prim*, dacă $\mathcal{D}_a = \{-1; 1; -a; a\}$ adică dacă are 4 divizori. De exemplu: $\mathcal{D}_3 = \{-3; -1; 1; 3\}$; $\mathcal{D}_5 = \{-5; -1; 1; 5\}$.

Observaţii.

1° Toate proprietăţile divizibilităţii în $\mathbb{N}$ rămân adevărate şi în $\mathbb{Z}$.
2° Numerele -1; 0; 1 nu sunt nici numere prime şi nici numere compuse.
3° În $\mathbb{Z}$ numărul divizorilor se dublează deoarece apar şi divizorii negativi.
De exemplu, în $\mathbb{N}$ avem $\mathcal{D}_6 = \{1; 2; 3; 6\}$;
iar în $\mathbb{Z}$ avem $\mathcal{D}_6 = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$.

M.7 FRACŢII

O pereche de numere naturale a şi b, $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ se numeşte *fracţie*.
Numărul a se numeşte *numărătorul* fracţiei, iar b se numeşte *numitorul* fracţiei.
Semnificaţia elementelor unei fracţii:
– *numitorul* arată *în câte părţi egale* s-a împărţit întregul
– *numărătorul* arată *câte părţi egale* s-au luat din întreg.

Exemplu „$\frac{3}{4}$" arată că întregul a fost împărţit în 4 părţi egale şi s-au luat 3 astfel de părţi.

„$\frac{5}{5}$" întregul s-a împărţit în 5 părţi egale şi s-au luat toate 5.

„$\frac{5}{2}$" arată că întregii s-au împărţit în câte 2 părţi egale şi au fost luate 5.

„$\frac{0}{6}$" arată că întregul a fost împărţit în 6 părţi egale dar încă nu s-a luat nici o parte.

▪ **Clasificare:**

◇ fracţii *subunitare* – au numărătorul mai mic decât numitorul.

Dacă $a < b \Rightarrow \frac{a}{b}$ este subunitară.

De exemplu $\frac{2}{3}; \frac{7}{10}$.

◇ fracţii *echiunitare* – au numărătorul egal cu numitorul.

Dacă $a = b \Rightarrow \frac{a}{b}$ este echiunitară.

De exemplu $\frac{5}{5}; \frac{7}{7}$.

◇ fracţii *supraunitare* – au numărătorul mai mare decât numitorul.

Dacă $a > b \Rightarrow \frac{a}{b}$ este supraunitară.

De exemplu $\frac{5}{2}; \frac{99}{4}$.

- **Fracţii echivalente**

Fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ se numesc *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$ şi scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

De exemplu $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$, deoarece $5 \cdot 12 = 3 \cdot 20$.

- **Compararea fracţiilor**

$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ dacă } a \cdot d < b \cdot c.}$ De exemplu: $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$; $(3 \cdot 6 < 5 \cdot 5)$.

$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dacă } a \cdot d = b \cdot c.}$ De exemplu: $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$; $(2 \cdot 14 = 7 \cdot 4)$.

$\boxed{\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ dacă } a \cdot d > b \cdot c.}$ De exemplu: $\frac{5}{2} > \frac{7}{6}$; $(5 \cdot 6 > 2 \cdot 7)$.

- **„Operaţii"** în urma cărora obţinem fracţii echivalente cu o fracţie dată.

◇ ***Amplificarea*** $\boxed{\frac{{}^{n)}a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad (\forall)\ a \in \mathbb{N};\ b; n \in \mathbb{N}^*}$

De exemplu: $\frac{{}^{2)}2}{3} = \frac{4}{6}$; $\frac{{}^{5)}2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{{}^{10)}7}{4} = \frac{70}{40}$

◇ ***Simplificarea*** $\boxed{\frac{a^{(d}}{b} = \frac{a : d}{b : d}, \quad (\forall)\ a \in \mathbb{N},\ b, d \in \mathbb{N}^*,\ d \neq 1;\ a \,\vdots\, d;\ b \,\vdots\, d}$

De exemplu: $\frac{18^{(2}}{24} = \frac{9^{(3}}{12} = \frac{3}{4}$ sau direct $\frac{18^{(6}}{24} = \frac{3}{4}$.

Atenţie.

1° Există fracţii care nu se pot simplifica. Aceste fracţii se numesc *fracţii ireductibile.*

$\boxed{\frac{a}{b} \text{ este fracţie ireductibilă dacă } (a; b) = 1}$

(adică numărătorul şi numitorul sunt numere naturale prime între ele).

De exemplu $\frac{16}{25}$ este fracţie ireductibilă deoarece $(16; 25) = 1$.

2° Dacă fracţia $\frac{a}{b}$ nu este ireductibilă, obţinem o fracţie ireductibilă echivalentă cu ea simplificând fracţia dată cu c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului.

$\boxed{(a; b) = d \Rightarrow \frac{a^{(d}}{b} = \frac{a : d}{b : d} \text{ şi } \frac{a : d}{b : d} \text{ este ireductibilă.}}$

M.8 SCRIEREA UNUI NUMĂR RAŢIONAL SUB FORMĂ ZECIMALĂ SAU FRACŢIONARĂ

Oricare număr raţional având ca reprezentant $\frac{a}{b}$ se poate scrie sub formă zecimală, împărţind pe a la b.

- **Fracţiile zecimale finite** se obţin din *fracţiile ireductibile* de forma $\frac{a}{b}$ dacă $b = 2^n \cdot 5^p$; $n, p \in \mathbb{N}$.

Exemplu $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{21}{4} = 5{,}25$; $\frac{7}{5} = 1{,}4$; $\frac{11}{20} = 0{,}55$; $\frac{21379}{1000} = 21{,}379$.

Pentru transformarea unei fracţii zecimale finite în fracţie se procedează astfel:
– *la numărător* se scrie numărul fără virgulă;
– *la numitor* se scrie 10^n, unde n reprezintă numărul de cifre situate după virgulă

$$\overline{k, a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{\overline{k a_1 a_2 \ldots a_n}}{10^n};\ k \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ iar } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ sunt cifre.}$$

Exemplu $5{,}25 = \frac{525^{(25}}{100} = \frac{21}{4}$; $21{,}379 = \frac{21379}{1000}$; $1{,}4 = \frac{14^{(2}}{10} = \frac{7}{5}$.

- **Fracţiile zecimale periodice simple** au o *grupă de cifre* care se repetă de o infinitate de ori şi se obţin din fracţiile ireductibile $\frac{a}{b}$ dacă $b = 3^{e_1} \cdot 7^{e_2} \cdot 11^{e_3} \cdot 13^{e_4} \cdot \ldots$, unde $e_1, e_2, e_3, \ldots \in \mathbb{N}$ (adică descompunerea în factori primi a numitorului **nu** conţine factorii 2 şi 5).

De exemplu: $\frac{31}{99} = 0{,}3131\ldots31\ldots = 0{,}(31)$; $\frac{47}{9} = 5{,}22\ldots2\ldots = 5{,}(2)$; $\frac{25}{3} = 8{,}(3)$.

Pentru transformarea fracţiilor zecimale periodice simple în fracţie se scrie partea întreagă urmată de fracţie care are:
– *la numărător* numărul format de perioadă
– *la numitor* atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada

$$\overline{k, (a_1 a_2 \ldots a_n)} = k\frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}};\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_1, \ldots, a_n - \text{cifre.}$$

Exemplu $0{,}(31) = \frac{31}{99}$; $0{,}(63) = \frac{63^{(9}}{99} = \frac{7}{11}$;

$$1{,}(6) = 1\frac{6^{(3}}{9} = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{ sau } 1{,}(6) = \frac{16-1}{9} = \frac{15^{(3}}{9} = \frac{5}{3};$$

$$2{,}(512) = 2\frac{512}{999} = \frac{2510}{999} \text{ sau } 2{,}(512) = \frac{2512-2}{999} = \frac{2510}{999}.$$

- **Fracțiile zecimale periodice mixte** au între virgulă și perioadă, o grupă de cifre care nu se repetă numită parte neperiodică. Se obțin din fracțiile $\frac{a}{b}$ ireductibile dacă

$$\boxed{b = 2^{e_1}\cdot 5^{e_2}\cdot 3^{e_3}\cdot 7^{e_4}\cdot 11^{e_5}\ldots;\quad e_1, e_2, \ldots \in \mathbb{N}}$$

(adică numitorul are în descompunere pe lângă factorii 2 și 5 și alți factori primi).

Exemplu $\frac{7}{30} = 0{,}2(3)$; $(30 = 2\cdot 3\cdot 5)$; $\frac{5}{6} = 0{,}8(3)$; $(6 = 2\cdot 3)$;

$\frac{37}{12} = 3{,}08(3)$; $(12 = 2^2\cdot 3)$.

Pentru transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte în fracții se scrie partea întreagă urmată de fracție care are:

– *la numărător* diferența dintre numărul aflat după virgulă (fără paranteză), și numărul format de partea neperiodică.

– *la numitor* atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmate de atâtea cifre de 0 câte cifre are partea neperiodică.

$$\overline{k,a_1a_2\ldots a_p(b_1b_2\ldots b_n)} = k\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_pb_1b_2\ldots b_n}-\overline{a_1a_2\ldots a_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}\underbrace{00\ldots0}_{p\text{ cifre}}};$$

$k\in\mathbb{N}$; $n,p\in\mathbb{N}^*$; $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n$ cifre.

Exemplu $0{,}2(3) = \frac{23-2}{90} = \frac{21^{(3}}{90} = \frac{7}{30}$; $0{,}321(4) = \frac{3214-321}{9000} = \frac{2893}{9000}$;

$0{,}8(3) = \frac{83-8}{90} = \frac{75^{(15}}{90} = \frac{5}{6}$; $3{,}08(3) = 3\frac{83-8}{900} = 3\frac{75^{(25}}{900} = 3\frac{3^{(3}}{36} = 3\frac{1}{12} = \frac{37}{12}$

sau $3{,}08(3) = \frac{3083-308}{900} = \frac{2775^{(75}}{900} = \frac{37}{12}$.

M.9 REPREZENTAREA NUMERELOR REALE PE AXĂ. COMPARAREA ȘI ORDONAREA NUMERELOR

▪ REPREZENTAREA NUMERELOR PE AXĂ

◇ **Axa numerelor** este o dreaptă pe care sunt fixate:

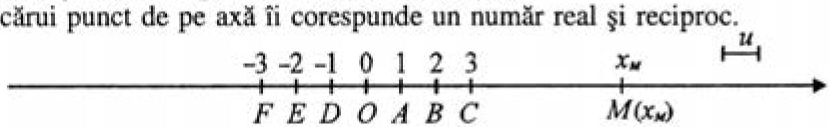
– un punct O, numit *origine*;

– un segment $OA = u$ (unitate de măsură);

– un sens pozitiv (spre dreapta) de la O spre A, indicat prin săgeată.

Punctul M de pe axă se numește *imaginea* numărului real x_M, iar numărul x_M se numește *abscisa* punctului M. Scriem $M(x_M)$.

Fiecărui punct de pe axă îi corespunde un număr real și reciproc.



De exemplu, scrierea $B(2)$ se citeşte „punctul B are abscisa 2" şi înseamnă că: punctului B îi corespunde pe axă numărul 2, deci $OB = 2u$. Dacă avem $F(-3)$ înseamnă că punctului F îi corespunde pe axă numărul -3, deci este la stânga originii.

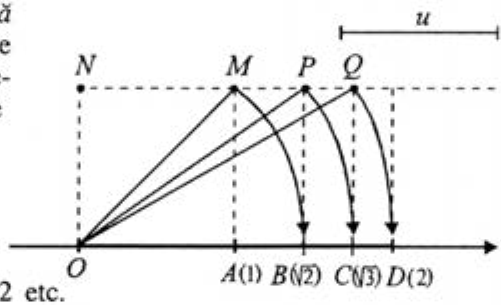
◇ Fiind date punctele $A(x_A)$ şi $B(x_B)$ notăm AB lungimea segmentului determinat de ele sau distanţa dintre punctele A şi B, deci $AB = |x_B - x_A|$.
De exemplu, pentru $B(2)$, $F(-3) \Rightarrow FB = |x_B - x_F| = |2+3| = |5| = 5$ sau $BF = |x_F - x_B| = |-3-2| = |-5| = 5$.

◇ *Practic pentru a* ***reprezenta*** *pe axă* numerele întregi şi cele iraţionale se construiesc pe axă dreptunghiurile succesive $OAMN$, $OBPN$, $OCQN$ etc., în care

$ON = 1;\ OA = 1 \overset{T.P.}{\Rightarrow} OM = OB = \sqrt{2}$

$ON = 1;\ OB = \sqrt{2} \overset{T.P.}{\Rightarrow} OP = OC = \sqrt{3}$

$ON = 1;\ OC = \sqrt{3} \overset{T.P.}{\Rightarrow} OQ = OD = \sqrt{4} = 2$ etc.



se trasează cu compasul.

◇ Dacă punctele $A(x_A)$ şi $B(x_B)$ se află pe axă şi A este mai aproape de originea O decât punctul B, atunci $x_A < x_B$.

◇ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ spunem că numărul a este mai mare decât numărul b, dacă există numărul pozitiv c ($c>0$) astfel încât $a = b + c$. În acest caz, scriem $a>b$.

$\boxed{a>b \text{ dacă } \exists\ c>0 \text{ astfel încât } a = b + c}$

De exemplu: $5>4{,}7$ deoarece $5 = 4{,}7 + 0{,}3$ şi $-3>-4$ deoarece $-3 = -4 + 1$.

■ COMPARAREA ŞI ORDONAREA NUMERELOR

◇ Dacă a, $b \in \mathbb{R}$, pentru a le compara, procedăm astfel:

1° Se compară diferenţa lor cu zero:
dacă $a-b<0 \Rightarrow a<b$;
dacă $a-b=0 \Rightarrow a=b$;
dacă $a-b>0 \Rightarrow a>b$.

De exemplu: $2-5 = -3 < 0 \Rightarrow 2<5$.

2° Se compară raportul lor cu 1:
dacă $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b$;
dacă $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$;
dacă $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b$.

De exemplu $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow 3 > 2$.

Observaţii.

1° Dintre două numere care au semne contrare, numărul negativ este mai mic.
$-2 < 3$; $-\sqrt{5} < 0{,}001$.

2° Orice număr negativ este mai mic decât 0.

3° Orice număr pozitiv este mai mare decât 0.

4° Dintre două numere negative este mai mare cel care are modulul mai mic.
$|-2|<|-3| \Rightarrow -2>-3$.

5° Dacă $a>b$, $b>0$, atunci $a^n > b^n \Leftrightarrow a > b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

M.10 DETERMINAREA VALORII ABSOLUTE A UNUI NUMĂR REAL

■ **Valoarea absolută** sau **modulul** unui număr real x, notată $|x|$ se defineşte astfel

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Această scriere este cunoscută sub denumirea de forma explicită a modulului.

Exemplu $|-7| = -(-7) = 7$; $|7| = 7$; $|0| = 0$; $|-2{,}3| = 2{,}3$.

$|1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$, deoarece $1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < 0$.

■ **Proprietăţi.**

1. Modulul oricărui număr real este pozitiv sau zero.

$\boxed{|x| \geq 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}}$ $|-3| = 3 > 0$; $|5| = 5 > 0$.

2. Orice număr real şi opusul său au acelaşi modul.

$\boxed{|x| = |-x|,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}}$ $|-3| = |3| = 3$.

3. Modulul unui număr este 0 dacă şi numai dacă numărul este egal cu 0.

$\boxed{|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$

4. Modulul unui produs de factori este egal cu produsul modulelor factorilor.

$\boxed{|x \cdot y \cdot z \cdot \ldots| = |x| \cdot |y| \cdot |z| \cdot \ldots,\ (\forall)\ x, y, z, \ldots \in \mathbf{R}}$

5. Modulul unui cât este egal cu câtul modulelor.

$\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ (\forall)\ x \in \mathbf{R};\ y \in \mathbf{R}^*}$ $\left|\frac{-3}{2}\right| = \frac{|-3|}{|2|} = \frac{3}{2}$.

6. Modulul sumei este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor.

$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}}$ – inegalitatea triunghiului.

Observaţii.

a) $\boxed{\text{Dacă } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow |x + y| = |x| + |y|}$

$$\left.\begin{array}{l} |(-2) + (-3)| = |-5| = 5 \\ |-2| + |-3| = 2 + 3 = 5 \end{array}\right| \Rightarrow |(-2) + (-3)| = |-2| + |-3|$$

b) $\boxed{\text{Dacă } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |x| + |y|}$

$$\left.\begin{array}{l} |(-5) + 2| = |-3| = 3 \\ |-5| + |2| = 5 + 2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 < 7 \Rightarrow |(-5) + 2| < |-5| + |2|$$

7. $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3;\ \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$

8. $\boxed{\text{Dacă } \begin{matrix} a > 0 \\ |x| \le a \end{matrix} \Bigg| \Leftrightarrow -a \le x \le a}$

Se foloseşte la rezolvarea inecuaţiilor ce conţin modul.

a) $|x| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2 \Rightarrow x \in [-2; 2]$
b) $|x| < 6 \Rightarrow -6 < x < 6 \Rightarrow x \in (-6; 6)$
c) $|x| < -3$ imposibil deoarece $|x| \ge 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ (vezi proprietatea 1).

9. $\boxed{\text{Dacă } \begin{matrix} a > 0 \\ |x| = a \end{matrix} \Bigg| \Leftrightarrow x = \pm a}$

Se foloseşte la rezolvarea ecuaţiilor ce conţin modul.

a) $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$ deoarece $|-3| = 3$ şi $|3| = 3$.

b) $|x-2| = 4 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{I. } x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{II. } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

c) $|x| = -2$ imposibil.

10. $\boxed{\text{Dacă } \begin{matrix} a > 0 \\ |x| \ge 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \begin{matrix} x \le -a \\ \text{sau} \\ x \ge a \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)}$

$|x| \ge 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

M.11 INTERVALE ÎN $\mathbb{R}$

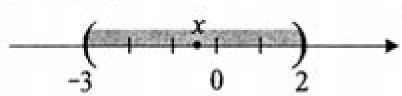
Intervalele sunt mulţimi numerice infinite. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ intervalele se pot împărţi în următoarele categorii:

Intervale
- mărginite
  - deschise: $(a; b)$
  - închise: $[a; b]$
  - semideschise (semiînchise): $(a; b]$ sau $[a; b)$
- nemărginite
  - la stânga: $(-\infty; a)$; $(-\infty; a]$
  - la dreapta: $(a; +\infty)$; $[a; +\infty)$
  - la ambele extremităţi: $(-\infty; +\infty)$

1. Intervale mărginite

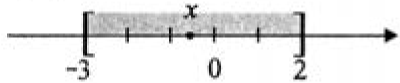
◇ deschise $\boxed{(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}$ $\quad a \notin (a; b);\ b \notin (a; b)$

$(-3; 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$



◇ închise $\boxed{[a;\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}$ $a \in [a;\, b]$ şi $b \in [a;\, b]$

$[-3;\, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

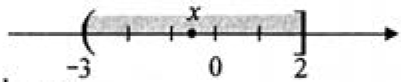


◇ semideschise (semiînchise)

– deschis la stânga şi închis la dreapta

$\boxed{(a;\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}}$ $a \notin (a;\, b]$ dar $b \in (a;\, b]$

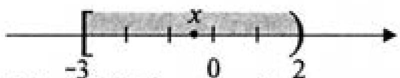
$(-3;\, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$



– închis la stânga şi deschis la dreapta

$\boxed{[a;\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}$ $a \in [a;\, b)$ dar $b \notin [a;\, b)$

$[-3;\, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$



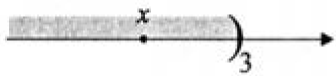
Din punct de vedere geometric intervalele mărginite reprezintă un segment.

2) Intervale nemărginite

◇ nemărginite la stânga şi deschise la dreapta

$$\boxed{(-\infty;\, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}}$$

$(-\infty;\, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$



◇ nemărginite la stânga şi închise la dreapta

$$\boxed{(-\infty;\, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}}$$

$(-\infty;\, -3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

◇ nemărginite la dreapta şi deschise la stânga

$$\boxed{(a;\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}}$$

$(2;\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

◇ nemărginite, la dreapta şi închise la stânga

$$\boxed{[a;\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}}$$

$[0;\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Observaţie. Din punct de vedere geometric intervalele nemărginite la una din extremităţi reprezintă semidrepte.

◇ nemărginit la ambele extremităţi

$$\boxed{(-\infty;\, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}}$$

adică din punct de vedere geometric reprezintă o dreaptă.